Serie Apuntes de Clase ΩΒΓ

N° 06
Octubre del 2014

MODELOS DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA.

Rafael Bustamante Romaní

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

La **Serie Apuntes de Clase Omega Beta Gamma** tiene por objetivo difundir los materiales de enseñanza generados por los docentes que tienen a su cargo el desarrollo de las asignaturas que forman parte de los Planes de Estudios de las Escuelas Académico-Profesionales de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Estos documentos buscan proporcionar a los estudiantes la explicación de algunos temas específicos que son abordados en su formación universitaria.

Encargados de la serie:

Bustamante Romaní, Rafael.
rbustamanter@unmsm.edu.pe

Cisneros García, Juan Manuel.
jcisnerosg@unmsm.edu.pe

Facultad de Ciencias Económicas.
Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Calle Germán Amézaga N° 375.
Ciudad Universitaria, Lima 1. Perú.

La **Serie Apuntes de Clase ΩBΓ** es promovida y desarrollada por un colectivo de docentes del Departamento de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
El contenido de cada publicación es íntegramente responsabilidad de cada autor, no representa necesariamente los puntos de vista de los integrantes del colectivo, ni de la Universidad.

Modelos de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva.

Rafael Bustamante Romaní[◊]

Resumen

En el presente trabajo se introduce al lector en los modelos de series temporales no lineales. Por un lado, se estudian los modelos Autorregresivos para la varianza condicionada Heterocedástica, principalmente los modelos ARCH y GARCH, EGARCH, ARCH-M, TGARCH, etc. Sus principales propiedades y su importancia en la modelación econométrica financiera, así como algunas herramientas o metodologías para la estimación de este tipo de modelos. Este documento es la primera parte de otro documento que presentara las estimaciones utilizando softwares como el Eviews o Stata.

Palabras Claves: Métodos econométricos: modelos uniecuacionales; series temporales, modelos de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva.

Clasificación JEL: C2, C29

[◊] Estudios concluidos de Doctorado en Economía con mención en los Recursos Naturales (c), Universidad Nacional Autónoma de México. MBA Gerencial, CENTRUM Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Economía con mención en Finanzas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. B. Sc. Economía, UNMSM. Profesor Auxiliar del Departamento de Economía de la UNMSM. Investigador asociado al Instituto de Investigaciones FCE - UNMSM. Contacto: rbustamanter@unmsm.edu.pe.

El autor agradece la colaboración en la elaboración del presente documento a Oscar Díaz Barzola, alumno de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNMSM. Contacto oscardiaz96@outlook.com

1.- INTRODUCCIÓN

Muchos de los modelos en la literatura financiera siguen especificaciones lineales, sin embargo, algunos aspectos del comportamiento económico, y en especial las actitudes de los inversionistas hacia el riesgo y los retornos esperados, encuentran una mejor representación en especificaciones nolineales. Por ejemplo, las interacciones estratégicas entre los participantes del mercado y los procesos por los cuales la información es incorporada en la estructura de precios de los activos son inherentemente no lineales (Aranda R. , 2002).

En ese sentido, la construcción de modelos no lineales resulta un aspecto importante dentro del análisis financiero, a pesar de que estos muestran una mayor dificultad al momento de su especificación y estimación que las representaciones lineales, requiriendo en muchos casos el uso de métodos computacionales. En las siguientes páginas nos centraremos en los avances más modernos registrados en este campo de la modelación financiera, en especial en los modelos no lineales en varianza, que resultan particularmente útiles al momento de evaluar las percepciones de riesgo de los agentes que participan en la economía (Aranda R. , 2002).

Numerosos estudios empíricos sobre el mercado financiero han mostrado que el comportamiento de alguna variables claves del mismo, tales como el precio de los activos financieros, las tasas de interés, el tipo de cambio, etc., tienden a mostrar una distribución de probabilidad con unas características que se alejan del supuesto normal de media cero y varianza constante, especialmente cuando se cuenta con información de alta frecuencia. Esto dio paso a un importante esfuerzo de investigación destinado a describir y modelar de forma más completa este comportamiento no estándar en las variables económicas y financieras; de hecho, el interés de la agenda de investigación se dirigió a tratar de modelar la volatilidad observada en las variables (Arce, 1998).

2. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE ESTE TIPO DE MODELOS:

(i) **Colas anchas de gran densidad:** Los retornos de los activos financieros tiende a ser leptocúrticos; esto es, se caracterizan por distribuciones de probabilidad con una curtosis superior a 3, y por lo tanto más apuntada que la distribución normal.

(ii) **Agrupamiento en la volatilidad:** Esto significa que grandes cambios en las variables tienden a ser seguidos por grandes cambios, de cualquier signo, mientras que pequeños cambios en las variables tienden a ser seguidos por pequeños cambios de cualquier signo, con lo cual el comportamiento de las variables está lejos de ser una normal.

(iii) **Efecto Leverage:** Este efecto se refiere a la tendencia observada generalmente en los cambios en los precios de las acciones a estar negativamente correlacionado con los cambios en la volatilidad de dicha acción; o la tendencia observada en los cambios en la inflación a estar negativamente correlacionada con los cambios en la volatilidad de la inflación. La existencia de costos fijos, financieros y de operación, proporciona una explicación parcial a este fenómeno.

(iv) **Periodos sin transacciones:** La información que se acumula cuando los mercados financieros están cerrados se refleja en los precios cuando estos se vuelven a abrir. Por ejemplo, si la información se acumula a una tasa constante en cada día del calendario, entonces la varianza de los retornos en el periodo que transcurre entre cierre del viernes y el cierre del lunes siguiente, debería ser tres veces la varianza desde el cierre del lunes al cierre del martes. Algunos autores, sin embargo, indican que la información se acumula a una tasa más lenta cuando los mercados están cerrados, en comparación a cuando estos están abiertos. Por lo tanto, las varianzas tienden a ser mayores después de los fines de semana y feriados, y más bajas en los días normales, pero no tanto como podría esperarse si la tasa de arribo de las novedades fuera constante.

(v) **Eventos predecibles:** Sin ser una sorpresa, las salidas o apariciones predecibles de información importante están asociados con una elevada volatilidad ex –ante. Por ejemplo, existe evidencia que demuestra el hecho que la volatilidad de los retornos de las acciones en empresas individuales es mayor cerca de los anuncios respecto de las ganancias. Lo mismo ocurre en el caso del tipo de cambio, cuando se libera importante información macroeconómica.

(vi) **Volatilidad y correlación serial:** Se ha encontrado evidencia de una fuerte relación inversa entre la volatilidad y la correlación serial en los índices accionarios en Estados Unidos.

(vii) **Comovimientos en las volatilidades:** Existe evidencia que apoya la idea que las volatilidades entre distintos activos financieros tienden a moverse de manera conjunta. Por ejemplo, se señala que un cambio de un 1% de la volatilidad del mercado implica un cambio de aproximadamente 1% en la volatilidad de cada acción.

(viii) **Variables Macroeconómicas y Volatilidad:** Dado que los valores de las acciones están estrechamente relacionados con la salud de la economía, es natural esperar que las medidas de incertidumbre macroeconómicas tales como la varianza condicional de la producción industrial, las tasa de interés, el crecimiento monetario, etc. Debería ayudar a explicar los cambios en la volatilidad del mercado accionario.

3. MODELOS DE HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA

La volatilidad es una característica inherente a las series de tiempo financieras. En general, no es constante y en consecuencia los modelos de series de tiempo tradicionales que suponen varianza homocedástica, no son adecuados para modelar series de tiempo financieras. Engle (1982) introduce una nueva clase de procesos estocásticos llamados modelos ARCH, en los cuales la varianza condicionada a la información pasada no es constante, y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas. Bollerslev (1986) generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos GARCH en los cuales la varianza condicional depende no solo de los cuadrados de las perturbaciones, como en Engle, sino además, de las varianzas condicionales de periodos anteriores (Casas Monsegny & Cepeda Cuervo, 2007). En 1991, Nelson presenta los modelos EGARCH, en los cuales fórmula para la varianza condicional un modelo que no se comporta de manera simétrica para perturbaciones positivas y negativas, como sucede en los modelos GARCH; expresando otro rasgo de la volatilidad: su comportamiento asimétrico frente a las alzas y bajas de los precios de un activo financiero. Un elevado número de trabajos sobre modelos de volatilidad se han publicado en las últimas décadas. Ver Poon y Granger (2003), Hansen y Lunde (2006) y Novales y Gracia (1993).

3.1 SERIES DE TIEMPO NO LINEALES Y ANÁLISIS ECONOMÉTRICO

Consideremos un modelo típico de series de tiempo para una variable aleatoria. Se relacionará una serie de tiempo X_t con una secuencia subyacente de shocks ε_t, que han afectado sus valores pasados. En análisis lineal de series de tiempo se asume que los shocks no están correlacionados en el tiempo, aunque no necesariamente son idénticas e independientemente distribuidas. Por el teorema de

Wold, cualquier serie puede ser representada como un promedio móvil infinito - MA (00) – de shocks, y esta representación MA lineal resume los comportamientos de la varianza y de las autocovarianzas no condicionales presentes en la serie.

En el análisis de series de tiempo no lineales comúnmente se asume que los shocks que están detrás de una serie son idénticos e independientemente distribuidos, pero en vez de asumir una representación lineal lo que se busca es una representación no lineal que relacione la serie w_t con la historia de los shocks: esto es

$$X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) \quad 1.$$

En la que se asume que ε_t tiene media cero y varianza unitaria esto es $\varepsilon_t \; Q(0,1)$. Donde Q es una cierta distribución de probabilidad no necesariamente normal y f (.) Es alguna función no lineal desconocida. La mayoría de estas representaciones son bastantes difíciles de manejar, pero casi todos los modelos de volatilidad caen dentro de una clase más restringida que se puede representar como:

$$X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) \quad 2.$$

La función $f(.)$ Representa la media condicional de x_t (condicional a toda la información pasada). Una observación importante respecto de la información referida a los rendimientos de activos financieros es que los retornos elevados tienden a ser seguidos por retornos de igual magnitud, lo que parece indicar que su volatilidad está correlacionada. Con el fin de capturar esa aparente correlación se diseñaron los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva.

3.2 NO ESTACIONARIEDAD EN VARIANZA

Muchas series económicas y financieras se caracterizan por tener períodos de relativa tranquilidad seguidos por otros de alta volatilidad. Debido a ello, la hipótesis de varianza constante de muchas series al analizarlas se ajusta poco a la realidad. La familia de modelos ARCH y GARCH pretende resolver este problema, y constituyen un intento de conseguir predictores de esa volatilidad utilizando información condicional, en este caso información sobre la estructura del término de error, que permita llevar a cabo una estimación de la volatilidad de los rendimientos del activo en cuestión durante períodos más cortos. Supongamos que tenemos la serie (Aragonés González & Blanco Viñas, 1996):

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad 3.$$

Donde μt es la parte determinística y εt la aleatoria. Asumamos además que el error de la ecuación depende de una variable cualquiera x_t , de forma tal que:

$$\varepsilon_t = v_t x_t \qquad \mathbf{4.}$$

Siendo un ruido blanco con media 0 y varianza σ2, por lo que:

$$V(y_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2 x_t^2 \qquad \mathbf{5.}$$

Es decir, la varianza del error no es constante. Hay que considerar entonces dos situaciones:

Si la x es conocida y σ^2 es constante sería el caso, por ejemplo, de que la variable x sea una función de μ:

$$x_t = h(\mu_t) \qquad \mathbf{6.}$$

Por lo que:

$$V(y_t) = h^2(\mu_t)\sigma^2 \qquad \mathbf{7.}$$

Sabiendo ello, se puede transformar la data a fin de estabilizar la varianza (que no dependa de t). Así, se plantea una transformación de y_t, $g(y_t)$, vía una transformación de Taylor alrededor de μ :

$$g(y_t) \approx g(\mu_t) + (y_t - \mu_t)\left[g'(y_t)\Big|_{y_t=\mu_t} \right] \qquad 8.$$

$$\mathrm{V}\left[g(y_t)\right] = \left[g'(y_t)\Big|_{\mu_t} \right]^2 \mathrm{V}(y_t)$$
$$= \left[g'(y_t)\Big|_{\mu_t} \right]^2 h^2(\mu_t)\sigma^2 \qquad \mathbf{9.}$$

Entonces, para estabilizar la varianza la transformación a aplicar debería ser:

$$\left[g'(y_t)\Big|_{\mu_t} \right] = \frac{1}{h(\mu_t)} \qquad \mathbf{10.}$$

De forma tal que la varianza de la serie transformada sea igual a σ2. Por ejemplo, si yt tiene una desviación estándar proporcional a su nivel, es decir, $h(\mu_t) = \mu_t$, entonces:

$$g'(y_t) = \frac{1}{\mu_t} \qquad \mathbf{11.}$$

Por lo que:

$$g(y_t) = Ln(\mu_t) \qquad \mathbf{12.}$$

Es decir, se tiene una transformación logarítmica de la serie a través de la cual se garantizaría la estabilidad de su varianza. Cabe notar que esta es la transformación más utilizada para realizar la corrección de no estacionariedad en varianza.

b) Si una de las dos condiciones no se cumplen se usan los modelos ARCH

Si la transformación logarítmica no corrige la no estacionariedad en varianza, y no se tiene claridad de cuál podría ser la transformación apropiada, se opta por modelar la volatilidad de la serie a través de los procesos ARCH: el modelo de heterocedasticidad condicional1 autorregresiva cuyo principal objetivo es modelar y predecir la volatilidad de una serie.

En 1982, Robert Engle2 introduce por primera vez un modelo que apuntaba a incorporar en el análisis econométrico estándar, la heteroscedasticidad evidentemente que se observaba en los datos; este modelo se conoce como modelo ARCH (AutoRegresive – Conditional – Heteroskedastic). El modelo ARCH es útil no solo porque captura la mayor parte de los hechos estilizados, sino que también porque tiene aplicación en diversas áreas. Por ejemplo, el modelo ha sido utilizado en valoración de activos (Asset Pricing) con la finalidad de testear los modelos CAAPM, I-CAPM, APT; para desarrollar los test de volatilidad para comprobar la eficiencia de mercado, y para estimar riesgos sistemáticos de las variables en el tiempo en el contexto de modelos de mercado. También ha sido utilizado para medir la estructura temporal –tem structure- de la tasa de interés; para desarrollar estrategias de cobertura óptimas en contextos dinámicos; para examinar como fluye la información entre países, mercados, y activos; para valorar opciones y para modelar el premio al riesgo. En macroeconomía ha sido también utilizado

[1] ¿Por qué hablamos de una varianza condicional? Porque es más pequeña que la no condicional (esta última se considera además como la predicción de largo plazo de la varianza). Veámoslo en el caso de un AR(1). Como vimos antes, para ese modelo:

$$E(y_t) = 0 \qquad V(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\theta^2}$$

Si en cambio queremos hallar estos estadísticos condicionados a la información pasada tendríamos:

$$E_t(y_t) = \theta y_{t-1} \qquad V_t(y_t) = E(y_t - \theta y_{t-1})^2 = \sigma_\varepsilon^2$$

y dado que $|\theta| < 1$, podemos deducir que $Vt\ (yt) < V(yt)$

para construir carteras de deuda para países en desarrollo, para medir la incertidumbre inflacionaria, para examinar la relación entre la incertidumbre en el tipo de cambio y el comercio exterior, para estudiar el efecto de las intervenciones del Banco Central, y para caracterizar la relación entre la macroeconomía y el mercado accionario. Un proceso ARCH pude definirse de varias maneras, la más simple de definir es en términos de la distribución de los errores provenientes de un modelo de regresión dinámico. Sea la variable yt una variable aleatoria generada por el siguiente proceso.

$$y_t = x'_t \beta + \varepsilon_t \qquad \textbf{13.}$$

Donde x_t es el vector de variables predeterminadas, de orden kx1, el cual puede incluir valores rezagados de la variable dependiente, y β es un vector de parámetros a estimar. El modelo ARCH (q) caracteriza la distribución de los error estocástico ε_t condicionado a las realizaciones de un conjunto de variables $\psi_{t-1} = \{y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, x_{t-2}, \ldots\}$; de hecho la especificación original propuesta por Engle es

$$\varepsilon_t / \psi_{t-1} \approx N(0, h_t) \qquad \textbf{14.}$$

Supongamos entonces que podemos modelar la varianza condicional (no constante) como un AR (q), es decir:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \upsilon_t \qquad \textbf{15.}$$

Donde v_t es un ruido blanco. Tomando esperanza condicional de la ecuación anterior se obtiene que:

$$\mathrm{E}_t\left(\varepsilon_t^2\right) = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \qquad \textbf{16.}$$

Es decir:

$$\sigma_t^2 = h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 \qquad 17.$$

Con $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ para i = 1,2,3,...,q, para así garantizar que la varianza condicional sea positiva. Se puede notar que $\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - x'_{t-i}\beta$, i =1,2,3,...q, h_t es función de los elementos de ψ_{t-1}.

Que no es otra cosa que el modelo ARCH (q) (Engle, 1982). Este tipo de modelos son de especial importancia cuando se quiere estimar y predecir las fluctuaciones de variables de interés, como podrían ser los precios de las acciones y otra información financiera. Asimismo, el mejorar la estimación de la varianza hace posible la determinación de intervalos de confianza de mayor precisión y eleva la calidad de la estimación de los parámetros del modelo original. Finalmente, la varianza estimada puede ser utilizada como variable explicativa en algún modelo económico en el que se quiera relacionar el comportamiento de una variable con la volatilidad de otra. Cabe mencionar que, la especificación lineal no es la más conveniente ya que el modelo para yt y su varianza condicional son estimados mejor simultáneamente usando MV. Por ello, Engle propone trabajar con una especificación multiplicativa, cuyo ejemplo más simple es (Beltran Barco, 2002):

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2} \qquad 18.$$

Donde vt es un ruido blanco con media 0 y varianza 1, εt-1 es independiente y α_0 y α_1 son constantes tal que $\alpha_0 > 0$ y $0 < \alpha_1 < 1$. Esta especificación se traduce en una varianza condicional dependiente del primer rezago de la misma, o ARCH (1), de la forma:

$$E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = \alpha_o + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad 19.$$

En un modelo ARCH, la estructura del error es tal que la media condicional e incondicional sean 0, y a la vez, que la secuencia $\{\varepsilon_t\}$ no presente correlación entre sus elementos. El punto clave es que los errores no son independientes entre si en su varianza (segundo momento), de modo que la varianza condicional es un proceso autorregresivo.

La heterocedasticidad condicional es $\{\varepsilon_t\}$ se puede observar en $\{y_t\}$ al verificarse un proceso ARCH, de modo que este tipo de modelación permite capturar periodos de volatilidad y estabilidad en la serie $\{y_t\}$.

Específicamente, en un modelo ARCH la estructura del error y los parámetros de autocorrelación del proceso $\{y_t\}$ interactúan mutuamente. Cualquier shocks inusualmente grande (en valor absoluto) en v_t sería asociado a una varianza persistentemente grande en las secuencias de errores presente y futuros $\{\varepsilon_t\}$, siendo el valor de α1 lo que determinará la persistencia.

Cabe mencionar que es posible generalizar la especificación del proceso a través de un ARCH de orden mayor en el caso en que todos los shocks desde, ε_{t-1} hasta ε_{t-q} tienen un efecto directo sobre ε_t, de tal manera que la varianza condicional sigue un proceso autorregresivo de orden q.

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{\alpha_o + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2} \qquad 20.$$

El que da origen a un ARCH de orden q.

3.2. EL MODELO GARCH

GARCH es la abreviatura de Generalized Autorregresive Conditional Heteroscedasticity y da nombre a la ampliación del modelo ARCH ya comentado que realizó Bollerslev (1986) para los órdenes p,q, y Taylor (1986), para el caso específico de los órdenes 1,1. Bollersev (1986) propone una extensión a la función de varianza condicional que recibe el nombre de ARCH generalizado o GARCH. De gran utilidad en los trabajos empíricos. Bollersev sugiere la siguiente especificación para la varianza condicional (Arce, 1998)[4]. Basado en una extensión del trabajo de Engle, desarrolló una técnica que permite que la varianza condicional siga un proceso ARMA. En ese sentido el proceso que sigue el error puede ser representado por:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t} \qquad 21.$$

Donde:

$\sigma_v^2 = 1$

$$h_t = \alpha_o + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \qquad 22.$$

En el que se incorpora una estructura dinámica más compleja en la ecuación de la varianza, con componentes autorregresivos y de medias móviles. Se puede observar que en este caso que:

$$E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = h_t = \alpha_o + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \qquad 23.$$

Donde los α's y β's son menores que 1, para que el modelo no sea explosivo. Así, como se ve en (14), la varianza condicional depende de una constante, de la volatilidad pasada y de la estimación de la varianza condicional en el pasado. El punto importante es que la varianza condicional de ε_t esta dado por $E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t$, por lo tanto, los componentes de h_t son los que determinan la varianza condicional de ε_t.

La secuencia $\{v_t\}$ es un ruido independiente de los valores pasados de ε_t por lo que la media condicional e incondicional de ε_t será siempre cero. Hay que considerar que un modelo ARCH de orden alto puede tener una representación GARCH más parsimoniosa, que es más sencilla de identificar y estimar. Esta especificación más parsimoniosa permitirá que se establezcan menos restricciones para los coeficientes, o que se ve reforzado por la estructura del proceso GARCH, la que determina que todos los coeficientes que aparecen en h_t sean positivos. Además se tiene la seguridad de que la varianza condicional es finita dado que todas las raíces contenidas en la ecuación de h_t deben caer dentro del círculo unitario. Es por esta razón que los modelos GARCH suelen ser más beneficiosos.

El modelo ARCH (q) que antes se presentaba, puede mostrar ciertas dificultades de estimación cuando se aplica a estructuras dinámicas en los cuadrados de las series. Por ejemplo, en las series financieras, el número de retardos a utilizar es muy elevado y ello llevaría a un engorroso número de iteraciones para alcanzar una solución al sistema planteado, pudiendo darse el caso de no encontrar nunca una solución. Por ello, el mismo Engle propuso ya en 1983 ciertas restricciones a los parámetros del ARCH (1) que simplificaban su estimación; pero estas no eran un proceso generalizable, por lo que la aportación de Bollerslev es decisiva a la hora de poder dotar de utilidad al modelo presentado por Engle. El modelo GARCH es al modelo ARMA igual que el ARCH al AR y, siempre y cuando las condiciones de estacionariedad lo permitan, ambos son susceptibles de escribirse como procesos de medias móviles de orden infinito. Por ello, se podría pensar en el modelo GARCH como un ARCH de orden infinito. Por ejemplo, aplicando (18) para un GARCH (1,1), se puede escribir:

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \qquad 24.$$

Luego, es posible hallar la representación ARCH (∞) de (19) sustituyendo recursivamente el rezago de la varianza:

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\left(\alpha_0 + \alpha\varepsilon_{t-2}^2 + \beta\sigma_{t-2}^2\right)$$

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0\left(1+\beta\right) + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta\varepsilon_{t-2} + \beta^2\sigma_{t-2}^2$$

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0\left(1+\beta\right) + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta\varepsilon_{t-2} + \beta^2(\alpha_0 + \alpha\varepsilon^2{}_{t-3} + \beta\sigma_{t-3}^2$$

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0\left(1+\beta+\beta^2\right) + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta\varepsilon_{t-2}\alpha\beta^2\varepsilon_{t-3} + \beta^3\sigma_{t-3}^2$$

Al final tendremos.

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0\left(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots\right) + (\alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta\varepsilon_{t-2}\alpha\beta^2\varepsilon_{t-3} + \ldots. + \alpha\beta^i\varepsilon_{t-i}) + \beta^i\sigma_{t-i}^2$$

Así hasta el infinito se logra:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} \varepsilon_{t-1}^2 \qquad 25.$$

Nótese que la expresión (21) es similar al estimador de la varianza muestral pero con pesos menores para rezagos más distantes de εt.

4. ESPECIFICACIÓN DEL MODELO ARCH (Beltran Barco, 2002)

Para especificar un modelo ARCH es posible llevar a cabo las siguientes etapas:

1. Especificar correctamente la media de la serie, a través del método de selección Box & Jenkins; estimar el modelo y recoger los residuos.
2. Analizar los residuos al cuadrado de la estimación de la ecuación, a través de dos procedimientos:
   - Observar el correlograma de los residuos al cuadrado, para determinar qué componentes ARCH (GARCH) son significativos.
   - Llevar a cabo el ARCH-LM test, cuya hipótesis nula es que no hay términos ARCH (GARCH), es decir, dado:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = f\left(\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots; \alpha' s\right) \qquad 26.$$

Testear:

Ho: $\alpha' s = 0$ (no hay términos ARCH-GARCH)

Para ello se utiliza el estadístico $TR^2 \approx \chi_q^2$

3. Con el modelo GARCH (p, q) elegido probar de nuevo 2 a fin de verificar que toda la regresividad de la varianza haya sido bien recogida.

5. EL TEST DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (TEST LM)

Uno de los test que nos permiten verificar si las perturbaciones siguen procesos de heteroscedasticidad condicional autoregresiva es el LM (Multiplicadores de Lagrange) propuesto por Engle (1982). Estos Test involucran dos etapas:

Primera Etapa: Usar MCO para estimar el modelo ARMA (p,q) o regresión más apropiada.

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad 27.$$

Segunda etapa: Obtener el cuadrado de los errores ajustados. Regresionar el cuadrado de estos residuos sobre una constante, y sobre los q valores rezagados del mismo:

$$\hat{\varepsilon}^2_{t-1}, \hat{\varepsilon}^2_{t-2}, \hat{\varepsilon}^2_{t-3}, \ldots, \hat{\varepsilon}^2_{t-p} \qquad 28.$$

$$\hat{\varepsilon}^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2_{t-1} + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2_{t-2} + \alpha_3 \hat{\varepsilon}^2_{t-3} + \ldots + \alpha_p \hat{\varepsilon}^2_{t-p} \qquad 29.$$

Si no existen efectos ARCH y GARCH, los valores estimados de los coeficientes hasta deberían ser 0. De ahí, que esta regresión puede tener un adecuado poder explicativo lo que se verifica a través del coeficiente de determinación (R2 estadístico), el cual, en este caso, registrará un valor muy bajo. Con una muestra de T residuos, bajo la hipótesis nula de que no existen errores que siguen un proceso ARCH, es test estadístico TR2 converge a una distribución. Si TR2 es lo suficientemente grande, se rechaza la hipótesis nula de que los errores no siguen un proceso ARCH. De otro lado, si TR es lo suficientemente bajo, es posible concluir que los errores no presentaran efectos ARCH.

6. MODELOS ARCH-M (ENGEL, LILUEN, ROBINS 1987)

La teoría financiera sugiere que un activo financiero con mayor riesgo financiero percibido podría otorgar en promedio un retorno mayor. Por ejemplo, sea rt la diferencia entre la tasa de retorno ex_post de un activo cualquiera y el retorno de un activo seguro alternativo (Digamos un bono de BCRP). Supongamos, además, que rt puede descomponerse en una parte anticipada en t-1 por los inversionistas (que denotaremos por rt*), y una parte no anticipada esto es:

$$r_t = r_t^* + \varepsilon_t \qquad 30.$$

Entonces de acuerdo a la teoría financiera, el retorno promedio rt * podría estar relacionado con la varianza del retorno (ht). Para poder incorporar esta relación se postula el siguiente modelo de regresión con características ARCH:

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t{}'\beta + \delta h_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= n_t \sqrt{n_t} \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 \\ & \alpha_p \varepsilon_p \end{aligned} \qquad 31.$$

Para $\eta_t \sim N\ (0,1)$ .En esta formulación el efecto que la percepción de una mayor variabilidad en ε_t tiene sobre Y_t es capturada por el parámetro δ.

Engle, Lilien y Robins (1987) asumieron que el premio (prima) por el riesgo era una función creciente de la varianza condicional de ε_t (la medida del riesgo), en otras palabras, a mayor varianza condicional mayor premio por riesgo necesario para que los agentes decidan mantener el activo en el largo plazo. Si definimos como h_t a la varianza condicional de ε_t.

Una variante del modelo ARCH-M es usar la desviación estándar condicional en lugar de la varianza condicional. El modelo ARCH-M es frecuentemente usado en aplicaciones financieras donde el rendimiento esperado sobre el capital financiero está relacionado con el riesgo esperado del capital. Además este modelo permite que la media de una serie dependa, entre otras variables, de su propia varianza condicional (o su desviación estándar). Es decir:

$$y_t = \delta\sigma_t^2 + \beta x_t + \varepsilon_t \qquad 32.$$

El objetivo del modelo es determinar la relación existente entre la media y la varianza de la serie. De esta manera, por lo general, este tipo de modelos se utilizan para estudiar mercados de acciones, y establecer el trade-off que existe entre el riesgo (su volatilidad) y el rendimiento (su valor medio) de una acción.

7. MODELOS ASIMÉTRICOS

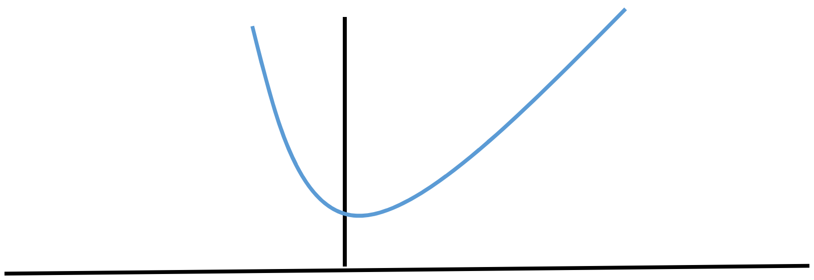
Los modelos ARCH/GARCH suelen ignorar la información relacionada con la dirección de los retornos: sólo las magnitudes interesan. No obstante, hay evidencia empírica que demuestra que las variables financieras son más volátiles ante shocks negativos que ante shocks positivos.

Efecto Leverage se refiere a la tendencia observada en los cambios en los precios de las acciones a estar negativamente correlacionados con los cambios en la volatilidad de dicho stock; o a la tendencia observada en los cambios en la inflación a estar negativamente correlacionado con los cambios en la volatilidad de la inflación. La existencia de costos fijos financieros y de operación, proporciona una explicación parcial a este fenómeno. Estos modelos intentan medir el efecto leverage que caracteriza el mercado de valores: las variables son más volátiles ante shocks negativos que ante shocks positivos. Las dos especificaciones más utilizadas son las siguientes:

7.1 TARCH (Zakaian, Glosten, Jaganathan y Runkle, 1993)

Generalmente se observa a menudo que los movimientos descendentes en el mercado son seguidos por las volatilidades más altas que los movimientos ascendentes de la misma magnitud. Para responder de este fenómeno, Engle y Ng (1993) describen una Curva de Impacto de Noticias asimétrica con la forma siguiente:

Figura Nº1



Los modelos TARCH o Threshold ARCH se introdujeron independientemente por Zakoian (1990) y Glosten, Jaganathan, y Runkle (1993). Este modelo consiste en una especificación cuadrática de la asimetría de la forma:

$$Y_t = X_t\gamma + \varepsilon_t \quad \mathrm{Var}(y_t) = \sigma_t^2 \qquad 33.$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2 \qquad 34.$$

Donde:

$d_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ (Malas noticias)

$d_{t-1} = 0$ d.o.m. $\varepsilon_{t-1} \geq 0$

Donde ε es el error es la noticia.

Nótese que "las buenas noticias" tienen un impacto α1, mientras que "las malas" tienen uno α1+γ. Por tanto si $\gamma > 0$ se confirma el efecto leverage; si $\gamma < 0$ no hay leverage sino sólo asimetría. Para especificaciones de mayor orden del modelo TARCH, se estima de la siguiente forma:

$$\sigma_{\mathrm{t}}^{2} = \alpha_{0} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{i}\varepsilon_{\mathrm{t-i}}^{2} + \gamma\varepsilon_{\mathrm{t-1}}^{2}\mathrm{d}_{\mathrm{t-1}} + \sum_{j=1}^{p} \beta\sigma_{\mathrm{t-1}}^{2} \qquad 35.$$

En realidad es como si tuviéramos dos modelos:

$$\sigma_{\mathrm{t}}^{2} = \alpha_{0} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{i}\varepsilon_{\mathrm{t-i}}^{2} + \sum_{j=1}^{p} \beta\sigma_{\mathrm{t-1}}^{2} \qquad 36.$$

Buenas Noticias.

$$\sigma_{\mathrm{t}}^{2} = \alpha_{0} + \sum_{i=2}^{q} \alpha_{i}\varepsilon_{\mathrm{t-i}}^{2} + (\alpha_{1} + \gamma)\varepsilon_{\mathrm{t-1}}^{2} + \sum_{j=1}^{p} \beta\sigma_{\mathrm{t-1}}^{2} \qquad 37.$$

Malas Noticias.

7.2 LOS MODELOS GARCH EXPONENCIALES (EGARCH (NELSON, 1991))

A partir de la estructura de varianza propuesta por Engle (1982) y utilizado por Bollersev (1986), Nelson (1991) propuso el siguiente modelo de evolución para la cual la varianza condicional de ε_t es una especificación logarítmica de la asimetría, de la forma:

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = X \quad 38.$$

$$\sigma_t^2 = e^X \quad 39.$$

$$\log(h_t) = \log\left(\sigma_t^2\right) = \alpha_0 + \beta \log\left(\sigma_{t-1}^2\right) + \alpha \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \quad 40.$$

Por lo que el efecto asimétrico sería exponencial antes que cuadrático. El efecto leverage se produce siempre que $\gamma<0$. En este tipo de modelos los efectos se originan en los logaritmos.

Donde:

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t} \quad \text{y} \quad \sigma_v^2 = 1 \qquad v_t \overset{iid}{\approx} N(0,1) \quad 41.$$

Si $\alpha > 0$, el modelo de Nelson implica que una desviación de $|v_t|$ de su valor esperado, hace que la varianza de ε_t sea más grande que si $\alpha = 0$, una idea similar a la considerada en los modelos GARCH. Una importante ventaja de este modelo es que el parámetro γ permite que el efecto anterior sea asimétrico; esto es, si $\gamma = 0$ una sorpresa o news positiva $(v_t > 0)$ tiene el mismo efecto sobre la volatilidad que una sorpresa negativa, y si $-1 < \gamma < 0$, entonces una sorpresa positiva incrementa la volatilidad en menos de lo que hace una sorpresa negativa, y si $\gamma < -1$, una sorpresa positiva reduce la volatilidad, mientras que una sorpresa negativa la incrementa.

$$\log(\mathrm{h_t}) = \log\left(\sigma_{\mathrm{t}}^2\right) = \alpha_0 + \beta \log\left(\sigma_{\mathrm{t-1}}^2\right) + \alpha \left|\frac{\varepsilon_{\mathrm{t-1}}}{\sigma_{\mathrm{t-1}}}\right| + \gamma \frac{\varepsilon_{\mathrm{t-1}}}{\sigma_{\mathrm{t-1}}} \qquad 42.$$

Varias investigaciones ha demostrado que la volatilidad de las rentabilidades de activos financieros tiende a crecer siguiendo la evolución de noticias positivas y negativas. Este fenómeno, conocido como "predicción asimétrica de segundos momentos" se a verificado tanto para activos individuales como para índices de mercado. De esta evidencia existen razones para esperar que tales efectos aparezcan también en los Betas condicionales.

Específicamente, Braun, Nelson y Sunier (1995) sugieren una metodología para la estimación de los Betas condicionales basada en la versión bivariada del ARCH exponencial (EGARCH), permitiendo de esta manera la posibilidad de que los retornos positivos y negativos afecten a los Betas en forma diferente.

1. El rol del apalancamiento operativo y financiero. Si el valor de una empresa en deuda cae, su nivel de apalancamiento se vería incrementando con respecto al patrimonio, causando que la volatilidad asociada a la rentabilidad patrimonial aumente. Sin embargo, Black (1976), Christie(1982) y Schwert(1985) demostraron

que el apalancamiento operativo y financiero no son suficientes para explicar las predicción asimétrica de segundos momentos.

1. Bibliografía

Aragonés González, J., & Blanco Viñas, C. (1996). *Estimación de la volatilidad condicional en el mercado de divisas con modelos de la familia GARCH.* Universidad Complutense de Madrid. Obtenido de http://www.aedem-virtual.com/articulos/iedee/v02/023043.pdf

Aranda, R. (2002). *Modelos de volatilidad especificación, estimación, y prueba de hipótesis.*

Arce, R. (1998). Introducción a los Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional (ARCH). Instituto Klein. Obtenido de http://www.uam.es/otroscentros/klein/doctras/doctra9806.pdf

Beltran Barco, A. (2002). *Econometría de Series de Tiempo.* No. Obtenido de http://econometriaii.files.wordpress.com/2010/01/beltran.pdf

Casas Monsegny, M., & Cepeda Cuervo, E. (2007). *Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a series financieras.* Universidad de los Andes. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/ceco/v27n48/v27n48a11.pdf