Serie Apuntes de Clase ΩΒΓ

N° 4

Setiembre del 2014

ECONOMETRÍA DE SERIES DE TIEMPO.

Rafael Bustamante Romaní

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

La **Serie Apuntes de Clase Omega Beta Gamma** tiene por objetivo difundir los materiales de enseñanza generados por los docentes que tienen a su cargo el desarrollo de las asignaturas que forman parte de los Planes de Estudios de las Escuelas Académico-Profesionales de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Estos documentos buscan proporcionar a los estudiantes la explicación de algunos temas específicos que son abordados en su formación universitaria.

Encargados de la serie:

Bustamante Romaní, Rafael.
rbustamanter@unmsm.edu.pe

Cisneros García, Juan Manuel.
jcisnerosg@unmsm.edu.pe

Facultad de Ciencias Económicas.
Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Calle Germán Amézaga N° 375.
Ciudad Universitaria, Lima 1. Perú.

ΩΒΓ
CURIOSITAS, DUBITARE, INVESTIGARE

Econometría de Series de Tiempo

Rafael Bustamante Romaní◊

Resumen

En estos apuntes de clase, se busca realizar un recuento del comportamiento de Las series económicas y las condiciones que deben cumplir para su estacionariedad. La estacionariedad de las series es requerida para su posterior modelación econométrica, siguiendo la metodología Box y Jenkins. Se revisan conceptos como estacionariedad, funciones de autocorrelación simple y parcial entro otros.

Palabras Claves: Series de tiempo, estacionariedad, modelos ARMA (p, q)

Clasificación JEL: C32, C40

◊ Estudios concluidos de Doctorado en Economía con mención en los Recursos Naturales (c), Universidad Nacional Autónoma de México. MBA Gerencial, CENTRUM Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Economía con mención en Finanzas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. B. Sc. Economía, UNMSM. Profesor Auxiliar del Departamento de Economía de la UNMSM. Investigador asociado al Instituto de Investigaciones FCE - UNMSM. Contacto: rbustamanter@unmsm.edu.pe..

El autor agradece la colaboración del alumno **Jerson Aguilar Valencia** en la elaboración del presente documento. Contacto: jerson18@live.com

I. ANALISIS UNIVARIADO

El análisis univariado de series de tiempo consiste en relacionar cada variable exclusivamente con su pasado, identificando su condición de estacionariedad y descomponiendo sus elementos cíclicos y tendenciales. Empezaremos este análisis con un par de definiciones básicas (Beltrán Barco, 2003).

El estudio de la estacionariedad de las series temporales resulta clave en la práctica moderna de la econometría. La atención a la estacionariedad de las series temporales se ha convertido en algo infranqueable por varios motivos (Mahía, 1999).

1. En primer lugar, la detección de la no-estacionariedad resulta estadísticamente fundamental, ya que la misma afecta de forma decisiva al uso correcto de muchas de las distribuciones en las etapas del contraste y validación de los modelos econométricos; en ese sentido, no debe olvidarse que la mayor parte de la teoría econométrica está construida asumiendo la estacionariedad de su "materia prima".
2. En segundo lugar, como resulta ampliamente conocido, se trata de evitar al máximo que la no estacionariedad de las variables guíe los resultados de las estimaciones de las relaciones que las unen, provocando, como es sabido, la obtención de regresiones espurias.
3. Por otro lado, el análisis de la estacionariedad es básico como etapa previa en el análisis de cointegración, una de las principales aportaciones a la técnica econométrica de los últimos años.
4. En cuarto lugar, el concepto de tendencia estocástica frente al tradicional de tendencia determinista interesa conceptualmente a la teoría económica y, en

especial, en el contexto del análisis temporal de los efectos de la política económica sobre las variables macro. El objetivo de este documento es servir de guía para la comprensión de los principales conceptos que rodean el tema del análisis de la estacionariedad y servir de documento de trabajo introductorio al que será publicado posteriormente en torno al tema de la cointegración (Mahía, 1999).

II. DEFINICIONES BASICAS

II.1 SERIES TEMPORAL

Una serie de tiempo es una secuencia de datos numéricos, cada uno de los cuales se asocia con un instante específico del tiempo. Podemos citar como ejemplos de series de tiempo al índice mensual de inflación, al tipo de cambio diario, al producto bruto interno trimestral, al índice de desempleo anual, etc. Estas series poseen como característica que los lapsos de tiempo, para cada una de ellas, son homogéneos; es decir, si se utiliza una serie con datos semanales, este mismo tipo de datos (con una misma frecuencia) se deberá mantener durante toda la serie (Casas Tragadora, 2002).

El análisis de una secuencia de datos se conoce como un análisis de series de tiempo de una variable. En caso que se esté estudiando un conjunto de series para la misma secuencia de tiempo, este análisis es denominado análisis múltiple de series de tiempo. El objetivo de este análisis es estudiar la dinámica o estructura temporal de la información. A través del estudio y comprensión del comportamiento de las series económicas, se puede llegar a predecir utilizando la información que se tiene hasta el momento utilizando extrapolación (Casas Tragadora, 2002).

Una serie temporal, ($\{y_t\}$, t = 1, 2,..., n), es un conjunto de observaciones o medidas realizadas secuencialmente en intervalos predeterminados y de igual, o aproximadamente igual, duración. La característica específica de una serie temporal es, por tanto, que las observaciones están ordenadas en el tiempo (Beltrán Barco, 2003).

II.2 PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO (PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO)

Un PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO es una sucesión de variables aleatorias $\{y_t\}$, donde t= -∞,..., -2, -1, 0, 1, 2,...∞. Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias correspondientes a distintos intervalos de tiempo. Consecuentemente, una serie temporal puede considerarse como una realización muestral de la n variables aleatorias que forman su proceso estocástico generador o la función e distribución conjunta que la genera.

La estructura probabilística de un proceso estocástico queda completamente definida por la distribución conjunta de las variables del mismo. Evidentemente, para caracterizar empíricamente esta distribución conjunta es necesario observar un cierto número de realizaciones del proceso. En ciencias sociales, este proceso de observación repetida no suele ser posible. Es por ello que se utiliza hipótesis simplificadoras de que el proceso estocástico es 1) lineal, 2) estacionario y 3) gaussiano[1].

1 El término gaussiano quiere decir que la distribución conjunta de las variables que forman el proceso estocástico es una normal multivariante, que puede ser caracterizada por sus correspondientes vectores de medias y matrices de varianzas covarianzas.

Cualquier proceso estocástico lineal de coeficientes fijos puede expresarse de dos maneras:

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \varepsilon_{t-s} \qquad 1.$$

$$y_t = \sum_{s=0}^{p} \phi_s y_{t-s} + \varepsilon_t \qquad 2.$$

Si ε_t sigue una distribución normal se dice que el proceso es gaussiano.

La expresión (1) se conoce como **descomposición de Wold** mientras que la expresión (2) se conoce como forma autorregresiva.

Puede demostrarse formalmente que ambas formulaciones son generales y equivalentes en el sentido de que, bajo ciertas condiciones de estabilidad, si se conocen los coeficientes ϕ_i de un proceso estocástico es posible obtener los correspondientes coeficientes ψ_i y viceversa.

II.3 EL RUIDO BLANCO$\{\varepsilon_t\}$:

Es un PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO con media cero, varianza constante e independiente. El interés de este de proceso radica en que, si sólo se cuenta con información muestral acerca de su propio pasado, no puede realizarse ninguna previsión mejor que su esperanza incondicional. Por tanto, los procesos de ruido blanco de esperanza nula resultan útiles para caracterizar las propiedades ideales del término de error de un modelo estocástico discreto dinámico.

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = \ldots\ldots 0$$
$$E(\varepsilon^2{}_t) = E(\varepsilon^2{}_{t-1}) = \ldots\ldots \sigma_\varepsilon^2 \text{ o } \left[Var(\varepsilon_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \ldots\ldots \sigma_\varepsilon^2\right] \qquad 3.$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1-j}) = \ldots\ldots 0 \ \forall \mathrm{j}$$

De la forma en que se ha definido el proceso ruido blanco es fácil determinar que este cumple con las características de estacionariedad débil ya que mantiene constante sus dos primeros momentos a lo largo de la serie.

II.4 **EL RANDOM WALK O CAMINO ALEATORIO**

Es un proceso estocástico discreto cuyas primeras diferencias son un ruido blanco, es decir:

$$\mathrm{y}_t = \mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\mathrm{y}_t - \mathrm{y}_{t-1} = \varepsilon_t \qquad 4.$$
$$\Delta \mathrm{y}_t = \varepsilon_t$$

Por ejemplo, el precio de una acción fluctuante y la situación financiera de un jugador pueden tratarse como un camino aleatorio. El término camino aleatorio fue introducido por Karl Pearson en 1905. Los resultados del análisis de paseo aleatorio han sido aplicados a muchos campos como la computación, la física, la química, la ecología, la biología, la psicología o la economía.

Se caracteriza porque presenta como series de primeras diferencia a valores aleatorios. Si suponemos que { ε t} es una serie puramente aleatoria (white-noise) con media μ y varianza σ 2, definimos que la serie {Yt} sigue un random walk si:

$$\mathrm{y}_t = \mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad 5.$$

Si suponemos que la primera observación, Yo, es igual a cero, entonces el proceso estocástico sigue el siguiente comportamiento: en forma general:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon_1 \\ y_2 &= y_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{aligned} \qquad 6.$$

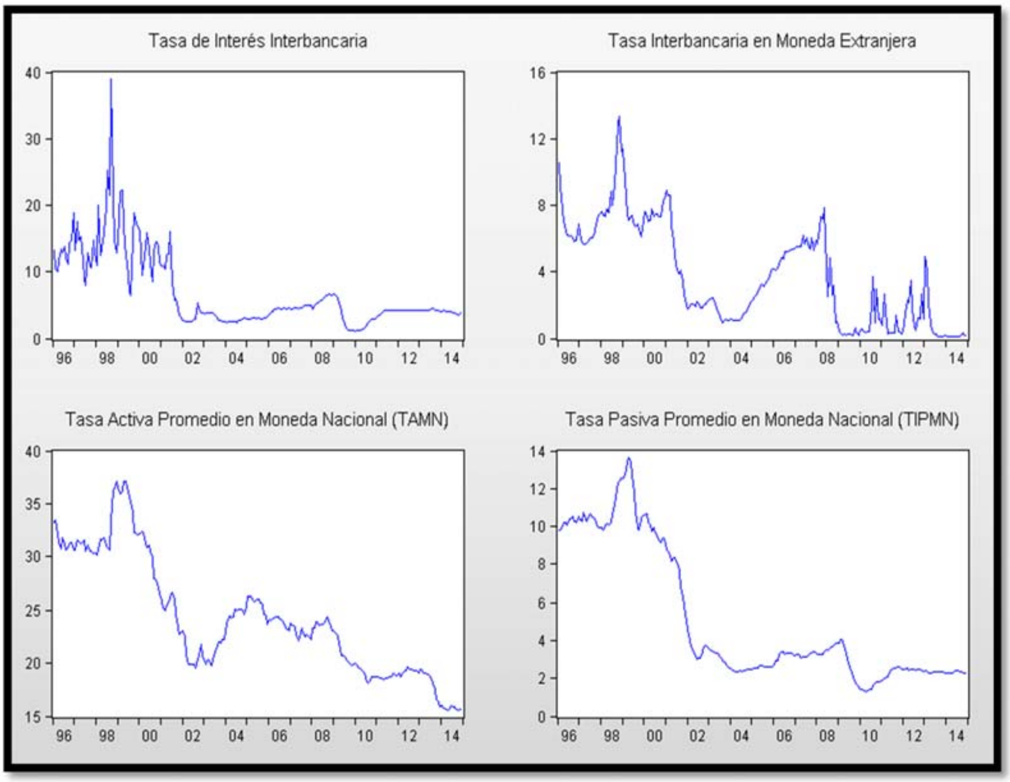
Generalizando tenemos:

$$y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \qquad 7.$$

De esta manera podemos definir a $E(Y_t) = t\mu$ y $var(Y_t) = t\sigma$. Esta serie al no presentar una media ni una varianza constante, entonces no es estacionaria, aunque su primera diferencia sí lo sea.

Figura N1

Comportamiento de series económicas caminos aleatorios



A continuación presentamos los procesos estocásticos discretos (PED) que servirán como estructuras a asociar con las series de data económica que se esté empleando en un estudio. Si conocemos las características de los principales PED, entonces una vez hecha la asociación con una serie de datos, el investigador obtendrá las características de esta última (Casas Tragadora, 2002).

II.4 ESTACIONARIEDAD ESTRICTA

Un proceso estocástico discreto es estacionario en sentido estricto si para toda $m-tupla\ (t1,\ t2,\ t3,\ ...,\ tm)$ y todo entero k, el vector de variables $(yt1,\ yt2,\ yt3,\ ...,\ ytm)$ tiene la misma distribución de probabilidad conjunta que el vector $(yt1+k,\ yt2+k,\ yt3+k,\ ...,\ ytm+k)$. Por ejemplo, para una dupla de periodos, es decir donde m=2,(yt, ys) deben mostrar la misma distribución de probabilidad conjunta que $(yt+k, ys+k)$, por lo q ue debe ser cierto que $Cov\ (yt, yt-2) = Cov\ (ys, ys-2) = Cov\ (ys+k, ys+k-2) = Cov\ (yt+k, yt+k-2)$, etc. (Beltrán Barco, 2003).

II.5 ESTACIONARIEDAD DÉBIL

Un PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO es estacionario en sentido débil si se cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &E(y_t) = \mu \quad \langle\infty \quad \forall t \\ &V(y_t) = \sigma^2 \quad \langle\infty \quad \forall t \qquad\qquad 8. \\ &Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k \forall t, k \end{aligned}$$

II.6 SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

En el caso que las series sean estacionarias en el sentido débil, se podrán modelar a través de un conjunto de especificaciones conocidas como los modelos AR, MA y ARMA. El objetivo de los mismos es explicar el componente cíclico de la serie (o su componente estacionario) a través de su pasado por medio de diferentes tipos de relaciones.

En las figuras 1, 2 y 3 se representan, respectivamente, las configuraciones típicas de series temporales generadas por procesos a) no estacionarios en media, b) estacionarios en media pero no estacionarios en varianza y c) estacionarios en media y varianza.

II.7 CARACTERÍSTICAS DE LAS SERIES TEMPORALES

• La mayoría de las series tienen una **tendencia.** Su valor medio cambia con el tiempo. Son las llamadas Series no estacionarias.

• Algunas Series describen **"meandros",** es decir, suben y bajan sin ninguna tendencia obvia o tendencia a revertir hacia algún punto.

• Algunas series presentan **"Shocks"** persistentes por lo que los cambios repentinos en estas series tardan mucho tiempo en desaparecer.

• Algunas series se mueven conjuntamente, es decir tienen **"co-movimientos positivos",** ejemplo: diferentes tasas de interés.

• **La "Volatilidad"** de algunas series varía en el tiempo y esto produce que puedan ser más variables en una año que en otro.

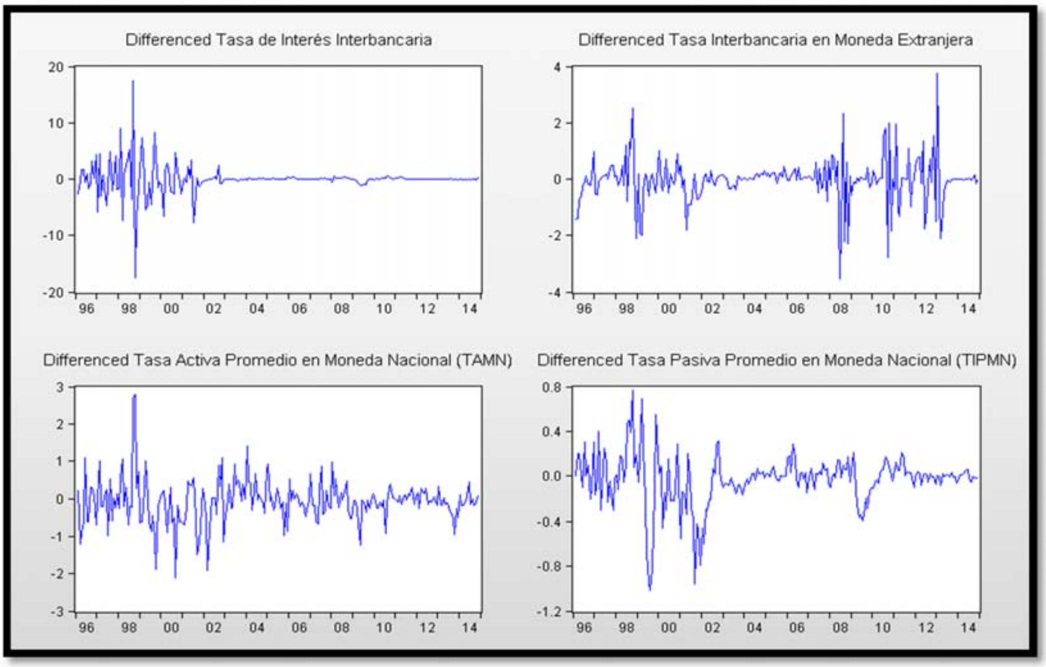
II.8 DIFERENCIACIÓN

La no estacionariedad en media puede resolverse diferenciando los datos. Se dice que las series que tienen esta propiedad exhiben una no estacionariedad homogénea, de forma que una serie es homogénea de grado d si la serie transformada es estacionaria en media $w_t = (1-L)^d y_t = \nabla^d y_t$.

En la figura Nº2 se puede observar el comportamiento de series estacionarias obtenidas a partir de las series caminata aleatoria presentadas en la figura Nº1.

Figura Nº2

Comportamiento de series económicas estacionarias



5. TRANSFORMACIONES BOX-COX

Si la dispersión de los datos varía en función de su esperanza de acuerdo con una relación del tipo:

$$\sigma_t = k\mu_t^{(1-\lambda)}$$

$$y_t^{(m,\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{(y_t + m)^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(y_t + m) & \lambda = 0 \end{cases} \qquad 5.$$

En donde el parámetro m da lugar a un cambio de origen arbitrario, que puede aplicarse o no por pura conveniencia (por ejemplo, para poder aplicar la transformación logarítmica a una serie que contiene algún dato negativo).

La definición de la transformación Box-Cox garantiza su continuidad, ya que puede demostrarse que:

$$\lim_{\lambda \to 0} y_t^{(m,\lambda)} = \ln(y_t + m)$$

Además de su efecto reductor de la heterocedasticidad, las transformaciones Box-Cox tienen la propiedad de inducir normalidad en las muestras, lo que resulta deseable para aplicar procedimientos de estimación máximo-verosímil y de contratación estadística de hipótesis (de Arce & Mahía, 2007).

Por último, cabe decir que en series históricas de naturaleza económica, la experiencia indica que suele ser necesario aplicar una transformación logarítmica y diferenciar al menos una vez. Esto tiene una ventaja importante, ya que la primera diferencia de una serie transformada logarítmica mente puede interpretarse, de forma aproximada, como una tasa de variación porcentual ya que, si $x_{t+1} = (1+\alpha)x_t$ entonces: $\ln x_{t+1} - \ln x_t = \ln(1+\alpha) = \alpha$.

A partir de estas ideas, puede definirse el concepto de *tasa logarítmica equivalente*, que es una alternativa a la tasa porcentual ordinaria que, además de las buenas propiedades estadísticas que induce (estacionariedad en media, estacionariedad en varianza y normalidad) tiene la ventaja de ser aditiva, esto es, que:

$$\ln x_n - \ln x_0 = \sum_{t=1}^{n} \left(\ln x_t - \ln x_{t-1} \right)$$

III. ESTADÍSTICOS DE ESPECIFICACIÓN DE MODELOS UNIVARIADOS

La metodología Box-Jenkins para la construcción de modelos univariantes es un método organizado de modelización que, a través de distintas etapas, permite obtener una representación univariante de una serie temporal determinada en la forma $ARIMA\,(p,d,q)$ de modo que se satisfagan una serie de requisitos de calidad (de Arce & Mahía, 2007).

Antes de presentar dichos modelos, se mostrarán un conjunto de estadísticos indispensables en su correcta identificación.

Los instrumentos estadísticos fundamentales para la modelización según la metodología Box-Jenkins son: la función de autocorrelación muestral, los contrastes de significación conjunta de los coeficientes de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial (de Arce & Mahía, 2007).

III.1 FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA (FAC)

La FAC de un proceso estocástico discreto $\{y_t\}$ es una función igual a:

$$\gamma_k = Cov(y_t , y_{t-k}) \quad \forall \, t,k \qquad 9.$$

Esta función de autocovarianza me va mostrar cual es el grado de asociación lineal entre la serie y su pasado k periodos hacia atrás. Sirve de instrumento para

III.2 . FUNCIÓN DE AUTOCORRELACION SIMPLE (FAS)

La FAS de un proceso estocástico discreto $\{y_t\}$ es una función definida teóricamente como:

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t , y_{t-k})}{\sqrt{V(y_t)}\sqrt{V(y_{t-k})}} \qquad \forall \, t, k \qquad 10.$$

Esta función, en su versión muestral, es una herramienta muy efectiva para modelar las series de tiempo económicas

Nótese que, si la serie es estacionaria, las varianzas serán constantes a lo largo del tiempo, es decir, $V(y_t) = V(y_{t-k})$, con lo cual el denominador de (4) es simplemente V (y) o γ_o , por lo que:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} \qquad 11.$$

Para estimar la función de autocorrelación simple de orden k, a nivel muestral, de un proceso estocástico discreto, se utilizará el estimador tradicional dado por la siguiente expresión (Beltrán Barco, 2003):

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-k}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}\sqrt{\frac{1}{T-K}\sum_{t=k+1}^{T}(y_{t-k}-\bar{y})^2}} \qquad 12.$$

No obstante, hay que observar que, asintótica mente, $\frac{1}{T-k} \approx \frac{1}{T}$, y $\sum_{t=1}^{T} \approx \sum_{t=k+1}^{T}$, por lo tanto, podemos reescribir (6) como:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-k}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2} \qquad 13.$$

Lo que equivale a estimar el coeficiente de la ecuación que relaciona y_té y_{t-k} .

Es decir, esta función muestral nos muestra el grado de asociación lineal que tiene y_té y_{t-k} a nivel de muestra. Sin embargo para validar esta relación, la misma tiene que ser sometida a un test de significancia estadística individual.

III.3 FUNCIÓN DE AUTO CORRELACIÓN PARCIAL (FAP)

El coeficiente de autocorrelación parcial k-ésimo (ϕ_{kk}) de la serie y_t se define como el último coeficiente de una autorregresión de la variable centrada sobre sus últimos k valores. Puede demostrarse que los coeficientes teóricos de autocorrelación parcial pueden calcularse a partir de los coeficientes de autocorrelación simple resolviendo las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & . & . & . & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & . & . & . & \rho_{k-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

9.

Para $k = 1, 2, 3, \ldots$, de forma que:

$$\phi_{11} = \rho_1 ; \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} ; \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} ; \ldots\ldots$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores los coeficientes teóricos por sus correspondientes valores muestrales se puede calcular la función de autocorrelación parcial (FAP) muestral.

El interés de la FAP consiste en que sus coeficientes pueden interpretarse como una estimación del k-ésimo coeficiente de un modelo AR(k). Consecuentemente:

1) Si los datos han sido generados por un modelo AR(p), tan sólo los primeros p coeficientes de autocorrelación parcial serán distintos de cero en el sentido estadístico.

2) Si los datos han sido generados por un modelo MA(q), la FAP será infinita y tenderá a aproximarse a cero asintóticamente.

III.4. FUNCIÓN DE AUTOCORRELACION PARCIAL MUESTRAL (FAPM)

La FAP de un proceso estocástico discreto $\{y_t\}$ es igual a su FAS, pero corregida por los rezagos intermedios, ya que indica el efecto marginal que cada término su k tiene sobre t. En adelante, denominaremos a la FAP como ϕ_k.

Para estimar la FAP de orden k de un proceso estocástico discreto es necesario correr una regresión que relacione $y_t é\ y_{t-k}$ pero en presencia de los rezagos intermedios. Así, por ejemplo, para hallar la FAP de orden 1 (que es igual a la FAS del mismo orden, ya que no habría rezagos intermedios), se corre la regresión (Beltrán Barco, 2003):

$$\tilde{y}_t = \hat{\phi}_{11}\tilde{y}_{t-1}$$

Donde $\tilde{y}$ es la desviación de y. Sin embargo, para estimar la FAP de orden 2, se requiere correr la regresión:

$$\tilde{y}_t = \lambda\tilde{y}_{t-1} + \hat{\phi}_{22}\tilde{y}_{t-2}$$

Donde ϕ_{22} es la FAP de orden 2, pero λ **no es la FAP de orden 1**. Algo similar ocurre si queremos estimar la FAP de orden 3 corriendo la regresión:

$$\tilde{y}_t = \lambda\tilde{y}_{t-1} + \tau\tilde{y}_{t-2} + \phi_{33}\tilde{y}_{t-3}$$

Siendo ϕ_3 la FAP de orden 3, pero teniendo en cuenta que **ni λ ni τ son las FAP de orden 1 y 2**, respectivamente.

Téngase en cuenta, finalmente, que, como lo comprobaremos más adelante, la FAS y la FAP tienden a 0 en el caso de que las series sean estacionarias.[2]

[2] En el caso de un $\{\varepsilon_t\}$ son cero excepto para k=0, cuando $\rho=\phi=1$.

IV. MODELOS AUTORREGRESIVOS

Son aquellos que tienen como variables explicativas a los valores pasados de la variable explicada, bajo el concepto que las series económicas pueden ser explicadas, en gran magnitud, por su comportamiento pasado.

IV.1. MODELO AUTORREGRESIVO DE ORDEN 1, AR(1)

Este modelo tiene la siguiente especificación funcional:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad 10.$$

Donde ε_t es ruido blanco. Hay que tener en cuenta, como lo veremos más adelante, que y_t es estacionario si y sólo sí $|\phi| < 1$.

Podemos reescribir este modelo como una función de ruidos blancos, reemplazando sucesivamente y_{t-1} y los rezagos que vayan apareciendo en la ecuación, de forma tal que se llegue a que:

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \varepsilon_{t-s} \qquad 11.$$

De esta forma, a partir de (9) se puede verificar que:

$$E(y_t) = 0 \qquad 12.$$

Dado que todos los elementos de la sumatoria son ruido blanco[3]. Asimismo,

$$V(y_t) = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^{2s} \sigma_\varepsilon^2 \qquad 13.$$

Por lo que la varianza de la serie quedará determinado por:

[3] Note que este valor esperado será 0 sólo en el caso de modelos sin constante como el planteado en la ecuación (8). De lo contrario, el mencionado valor será igual a la constante incluida.

$$V(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \qquad 14.$$

Observando la expresión (14) se confirma que la condición de estacionariedad de la serie vendría dada por $|\phi| < 1$, con lo que se garantiza una varianza finita y positiva. Sin embargo, como veremos más adelante, esta será una condición necesaria pero no suficiente.

Antes de analizar el comportamiento de las funciones de autocorrelación de un AR (1), hay que establecer la relación que existe entre y_t y los errores de la ecuación. Podemos plantear ésta a dos niveles:

- La relación de y_t con errores futuros:

$$E(y_{t-k}\varepsilon_t) = E\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s \varepsilon_{t-k-s}\varepsilon_t\right) = 0 \qquad 15.$$

En este caso el valor esperado planteado va a ser siempre igual a 0 ya que se relacionan errores (ruidos blancos) no contemporáneos.

- La relación de y_t con errores presentes o pasados:

$$E(y_t\varepsilon_{t-k}) = E\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s \varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-k}\right) = \phi^k \sigma_\varepsilon^2 \qquad 16.$$

En este caso el valor esperado planteado se hace distinto de cero siempre que s=k (momento en el cual se relacionan dos errores contemporáneos), siendo k la distancia que hay entre y_t y ε_t.

Este análisis demuestra que y_t va a tener relación con los errores pasados y presentes, pero nunca con los futuros.

IV.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA FAC

$$\gamma_o = \sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \quad 17.$$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(\mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(\phi \mathrm{y}_{t-1}^2 + \mathrm{y}_{t-1}\varepsilon_t\right) = \phi\gamma_0 + 0 \quad 18.$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(\mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-2}\right) = \mathrm{E}\left(\phi \mathrm{y}_{t-1}\mathrm{y}_{t-2} + \mathrm{y}_{t-2}\varepsilon_t\right) = \phi\gamma_1 + 0 = \phi^2\gamma_0 \quad 19.$$

Y así sucesivamente, por lo que, en general, se puede decir que:

$$\gamma_k = \theta^k \gamma_0 \qquad \forall\ k \geq 0 \quad 20.$$

Además, y como $|\theta| < 1$, puede observarse que a medida que k crece, la FAC converge a cero a ritmo θ.

IV.3. ANÁLISIS DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION SIMPLE (FAS)

Como vimos previamente $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, de forma tal que:

$$\rho_0 = 1 \quad 21.$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi\gamma_0}{\gamma_0} = \phi \quad 22.$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi^2\gamma_0}{\gamma_0} = \phi^2 \quad 23.$$

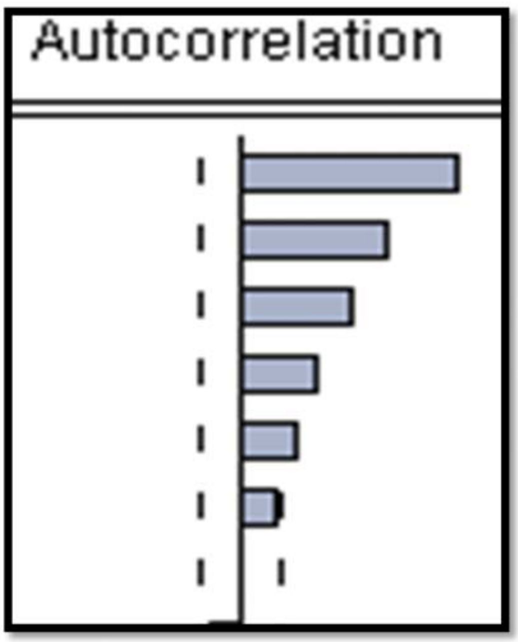
Y en general,

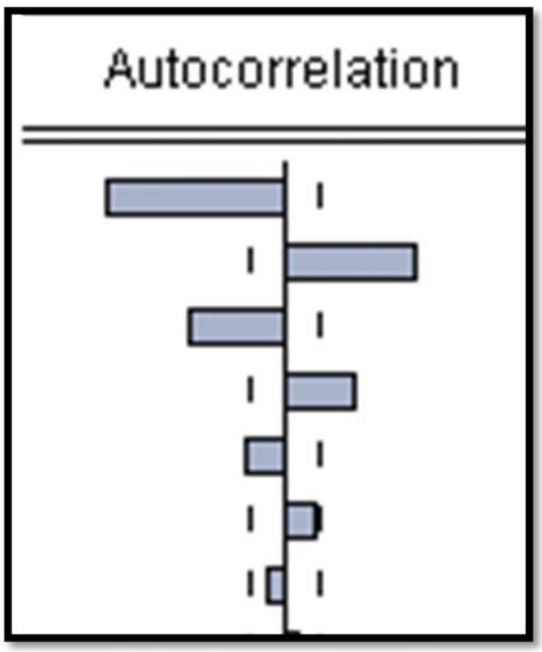
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \quad \forall k \geq 0 \qquad 24.$$

De forma tal que a iudentimedida que k crece la FAS converge a cero al mismo ritmo ϕ.

En las figuras 7 y 8 se representan, respectivamente, las funciones de autocorrelación simple de un proceso AR(1) con $\theta > 0$ y $\theta < 0$. Como puede verse, la característica fundamental de un proceso autorregresivo estacionario es que su función de autocorrelación simple es infinita.

Figura 5: FAS de un proceso AR (1) con 1 > 0. **Figura 6**: FAS de un proceso AR (1) con 1 < 0.





IV.4 ANÁLISIS DE LA FAP

La FAP de un PED $\{yt\}$ es igual a su FAS, pero corregida por los rezagos intermedios, ya que indica el efecto marginal que tiene el késimo rezago sobre el valor contemporáneo del proceso. En adelante, denominaremos a la FAP como ϕ_{kk} (Castro, 2008) .

Primeramente podemos realizar el análisis a nivel poblacional utilizando las ecuaciones propuestas por Yule Walker que nos dirán que el coeficiente $\phi_{ii} > 0$ si i=1 y cero para los demás casos.

Como se dijo anteriormente, para hallar la FAP es necesario correr regresiones particulares en las que se relacione y_t con el respectivo rezago y los intermedios. Así, para hallar la FAP de orden 1 se estima el modelo[4]:

$$y_t = \varphi_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad 14.$$

De forma tal que:

$$\hat{y}_t = \hat{\varphi}_{11} y_{t-1} \qquad 15.$$

Siendo la $FAP_1 = \varphi_{11}$

Lo mismo se aplica en el caso de que k=2, usando el modelo

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad 16.$$

$$\hat{y}_t = \lambda y_{t-1} + \hat{\varphi}_{22} y_{t-2} \qquad 17.$$

[4] Note que en este caso, como $E(y_t)=0$, se trabaja directamente con la variable, la que equivale al desvío correspondiente.

Donde, si tenemos en cuenta que se trata de un AR(1), el ϕ_{22} o la FAP_2 será igual a cero por definición. Lo mismo ocurrirá con las FAP's de órdenes superiores, por lo que podemos concluir que en este tipo de modelos la FAP es igual a cero para todo k>1 (de Arce & Mahía, 2007).

IV.5 MODELO AUTORREGRESIVO DE ORDEN 2, AR (2)

Un proceso AR (2) se modela a través de la siguiente especificación:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad 18.$$

Donde ε_t es ruido blanco.

Este proceso será estacionario si se cumplen las tres condiciones siguientes sobre sus coeficientes:

$|\phi_2| < 1$, $|\phi_2 + \phi_1| < 1$ y $|\phi_2 - \phi_1| < 1$

Es decir, el efecto individual del segundo rezago es menor que uno, así como su efecto conjunto con el primer rezago y el marginal respecto a este último. Estas condiciones garantizarán que la varianza de la serie sea finita y positiva lo que, como ya se dijo anteriormente, es una condición necesaria pero no suficiente de estacionariedad.

Tomando la esperanza de la serie podemos comprobar que ésta es igual a cero (siempre que el modelo no tenga constante). Así:

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) \qquad 19.$$

Dado que se trata de una serie estacionaria, las tres esperanzas de la expresión anterior son iguales, por lo que E (y_t) termina siendo cero.

IV.6 ANÁLISIS DE LA FAC

Para determinar la FAC de un proceso AR(2) es necesario trabajar con lo que se conoce como las ecuaciones de Yule-Walker. Para ello se postmultiplica la ecuación (15) por y_{t-k}, de forma que:

$$y_t y_{t-k} = \phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k} \qquad 20.$$

Luego, a esta expresión se le toma el valor esperado:

$$E(y_t y_{t-k}) = \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k}) \qquad 21.$$

Obteniéndose la siguiente expresión, para todo k>0

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \qquad 22.$$

Por lo que se puede concluir que la FAC también sigue un proceso autorregresivo. Así, y si tenemos en cuenta que $\gamma_{-p} = \gamma_p$, podemos utilizar (31) para escribir:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{Cuando k=0}$$ [5]

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \qquad \text{Cuando k=1} \qquad 23.$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \qquad \text{Cuando k=2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (32) es posible hallar γ_0, γ_1 y γ_2. Así,[6]

[5] Cuando k=0, el último elemento de la ecuación (30), $E(\varepsilon_t\, y_{t-k})$, no se hace cero, sino que es igual a $\theta^k\sigma^2_\varepsilon$, es decir, σ^2_ε.

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)\left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right]} \qquad 24.$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} \qquad 25.$$

$$\gamma_2 = \left[\frac{\phi_2(1-\phi_2)+\phi_1^2}{1-\phi_2}\right]\gamma_0 \qquad 26.$$

A partir de estas expresiones, es posible demostrar que la FAC de un AR(2) converge a cero, bajo diferentes formas, dependiendo de los valores que tomen θ_1 y θ_2.

IV.7 ANÁLISIS DE LA FAS

Utilizando las expresiones (19) á (20), podemos escribir:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad 27.$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \qquad 28.$$

Así, en general[7]

---

[6] Se deja al lector la demostración de que, a partir de la expresión (33), es posible verificar que las condiciones de estacionariedad mencionadas anteriormente garantizan una varianza finita y positiva.

[7] Esta expresión puede ser verificada a partir de las ecuaciones (36) y (37). Por ejemplo, utilizando la primera de ellas, y según (38):

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_{-1}$$

lo que, usando la simetría que provee la estacionariedad de la serie, es igual a:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

dado que ρ_0=1. Así,

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \qquad \forall\ k > 0 \qquad 29.$$

Como en el caso del FAC, el FAS de un AR (2) converge a cero ya que depende de sus rezagos y de los θ's, los cuales van cayendo a través del tiempo; no obstante, no se puede determinar a priori en qué momento esta función se hará cero, ni la forma en la que lo hará.

Cabe mencionar, finalmente, que las ecuaciones de Yule-Walker debieran tener como finalidad estimar los valores de la FAC y la FAS a partir de los estimadores de los θ's y del de σ^2_ε. Sin embargo, en la práctica, se utiliza como un método de estimación de los θ's, alternativo al de MCO, a partir de los valores estimados de los γ's y de σ^2_y

IV.8. ANÁLISIS DE LA FAP

La estimación de la FAP requiere, otra vez, la estimación de un conjunto de ecuaciones donde el último rezago incluido es el del orden respectivo de la FAP a estimar. Así,

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, se usará para hallar la $FAP_1=\phi_1$ 30.

$y_t = \lambda y_{t-1} + \varphi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t$, se usará para estimar la $FAP_2=\phi_2$ 31.

y así sucesivamente. Nótese que en la ecuación (26) la FAP_2 es igual, por definición, a φ_{22} , mientras que la FAP_1, que proviene de la estimación de la ecuación (26). Por lo mismo, si deseamos hallar la FAP_3, utilizando la ecuación (27)

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + \lambda_2 y_{t-2} + \varphi_{33} y_{t-3} + \varepsilon_t \qquad 32.$$

Observaremos que, de acuerdo a la especificación del modelo (de orden 3), él φ_{22} es cero. Esto será además cierto para todo k>2.

Finalmente, generalizando para procesos AR de orden p podemos decir que:

- La FAC y la FAS convergen a cero de distintas formas dependiendo de los signos de los respectivos ϕ_s .
- La FAP es igual a cero $\forall$ k > p.

De esta manera, la FAP va a ser de particular importancia en este tipo de modelos univariados, porque va a permitir identificar el orden del AR, el que coincide con el rezago a partir del cual la FAP se hace cero.

V. MODELO DE MEDIAS MÓVILES

Son aquellos que especifican la serie como un promedio ponderado de los errores pasados, los cuales también pueden explicar el comportamiento de la serie económica. Los procesos de medias móviles pueden interpretarse como una truncación del proceso estocástico general (1) (Beltrán Barco, 2003).

$$y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \ldots.$$

V.1 MODELO DE MEDIAS MÓVILES DE ORDEN 1, MA (1)

Este modelo tiene la siguiente especificación:

$$\mathrm{y}_\mathrm{t} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \qquad 33.$$

Nótese que un proceso de medias móviles es siempre estacionario porque es una combinación lineal de ruidos blancos, y estos siempre son estacionarios (Castro, 2008).

Tomando la esperanza y la varianza a la expresión 28 se puede verificar que:

$$\mathrm{E}(\mathrm{y_t}) = 0$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{y_t}) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \theta_1^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \theta_1^2\right) \quad 34.$$

V.2 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA (FAC)

En lo que respecta a la función de autocovarianza de este tipo de serie se tiene que:

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = \left(1 + \theta_1^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}\right)\right] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-2}\right) = \mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}\right)\right] = 0 \quad 35.$$

$$\gamma_3 = \mathrm{E}(\mathrm{y_t y_{t-3}}) = 0$$

Y así sucesivamente, por lo que podemos generalizar este resultado diciendo que:

$$\gamma_k = 0 \qquad \forall\, k > 1 \quad 36.$$

V.3 ANÁLISIS DE LA FAS

A partir de la expresión 44 podemos hallar la FAS de una serie MA(1), dividiendo los respectivos γ's entre γ_0; así,

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \quad 37.$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0$$

Por lo que generalizando se tiene que:

$$\rho_k = 0 \qquad \forall\, k > 1 \tag{38.}$$

V.4 ANÁLISIS DE LA FAP

Dado que el modelo de medias móviles, tal y como está planteado en la ecuación (28), sólo evidencia una relación entre y_t y los errores presentes y pasados, es necesario realizar un proceso de *inversión* a fin de rescatar la relación entre la primera y sus propios valores pasados. De esta forma, a partir de la mencionada expresión tenemos que (Castro, 2008):

$$\varepsilon_t = y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{39.}$$

y rezagando sucesivas veces obtenemos que:

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_{t-2} = y_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} \tag{40.}$$

.

.

.

Realizando los reemplazos de respectivos tenemos:

$$\varepsilon_t = y_t + \theta_1 \left[y_{t-1} + \theta_1 \left(y_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} \right) \right] \tag{41.}$$

$$\varepsilon_t = y_t + \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^{\ 2} y_{t-2} + \theta_1^{\ 3} \varepsilon_{t-3} \qquad 42.$$

De 37. Se puede despejar y_t para obtener:

$$y_t = -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^{\ 2} y_{t-2} - \theta_1^{\ 3} \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \qquad 43.$$

De lo que podríamos concluir que, si continuáramos reemplazando los rezagos de los residuos ε_t, entonces y_t estaría en función de su propio pasado en forma infinita:

$$y_t = -\sum_{s=1}^{\infty} \theta_1^{\ s} y_{t-s} + \varepsilon_t \qquad 44.$$

Nótese además que la ecuación (39) es la representación AR de un proceso MA. Debido a que un proceso MA es siempre estacionario, su representación AR también tiene que serlo. Para que esto último se cumpla θ_1 tiene que ser menor que 1 en valor absoluto, por lo que se dice entonces que un proceso MA será *invertible* (es decir tendrá una representación AR estacionaria) si y sólo sí $|\theta_1| < 1$.

Todo esto además implica que la FAP de un proceso MA (1) converge a cero en forma exponencial y bajo diferentes formas, dependiendo del signo de θ_1 : si es positivo converge a cero, pero siempre con valores negativos; si es negativo, el primer valor de la FAP será positivo y luego alternará en signo (Castro, 2008).

V.5 MODELO DE MEDIAS MÓVILES DE ORDEN 2, MA (2)

Este modelo tiene la siguiente especificación:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad 45.$$

Por lo que se puede deducir que su valor esperado y varianza son iguales a:

$$\mathrm{E}(\mathrm{y}_t) = 0 \qquad 46.$$

$$V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right) \sigma_\varepsilon^2 \qquad 47.$$

11.6 ANÁLISIS DE LA FAC

Utilizando procedimientos similares a los de los modelos vistos previamente, la FAC de un MA (2) puede derivarse de la siguiente manera (Castro, 2008):

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}\right)\right] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma_\varepsilon^2 = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \left(\theta_2 - 1\right)$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-2}\right) = \mathrm{E}\left[\left[\left(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}\right)\left(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \theta_1 \varepsilon_{t-4}\right)\right]\right] = -\theta_2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_3 = 0 \qquad 48.$$

.

.

.

a partir de lo cual es posible generalizar que:

$$\gamma_k = 0 \qquad \forall\, k > 2 \tag{49.}$$

V.7 ANÁLISIS DE LA FAS

De igual forma podemos derivar la FAS; así:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1(\theta_2 - 1)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0$$

Y generalizando:

$$\rho_k = 0 \qquad \forall\, k > 2$$

V.8. ANÁLISIS DE LA FAP

La FAP de un proceso MA(2) es algo más difícil de analizar y requiere desarrollar un procedimiento de *inversión* similar al del MA(1). En general, se puede decir que, como en el caso de este último, esta función converge a cero bajo distintas formas, dependiendo de los signos de θ_1 y θ_2 (Beltrán Barco, 2003).

Finalmente, generalizando para procesos MA de orden q podemos decir que:

- La FAC y la FAS son iguales a cero $\forall$ k > q.

- La FAP converge a cero de distintas formas dependiendo de los signos de los respectivos θ's.

De esta manera, la FAS va a ser de particular importancia en este tipo de modelos univariados, porque va a permitir identificar el orden del MA, el que coincide con el rezago a partir del cual la FAS se hace cero (de Arce & Mahía, 2007).

V.9. MODELO ARMA

Son aquellos que incorporan una componente autorregresivo (AR) y uno de promedios móviles (MA) en la especificación del comportamiento de la serie.

V.9.1. MODELO ARMA DE ORDEN 1, ARMA (1,1)

Este modelo tiene la siguiente especificación:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad 50.$$

De esta forma, el proceso ARMA (1,1) será estacionario cuando $|\theta_1| < 1$, es decir, cuando la parte AR de la serie lo sea, mientras que será invertible toda vez que $|\phi_1| < 1$.

Si tomamos valor esperado a 45 comprobaremos que:

$$\mathrm{E}(\mathrm{y}_t) = 0 \qquad 51.$$

Por lo que la varianza se puede hallar de la siguiente forma:

$$V(y_t) = \mathrm{E}(y_t)^2 = \mathrm{E}\left(\phi_1^{\,2} y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + \phi_1^{\,2}\varepsilon_{t-1}^2 + 2\phi_1 y_{t-1}\varepsilon_t - 2\phi_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1} - 2\theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\right) \qquad 52.$$

Al tomar esperanza al término del lado derecho varios elementos se hacen cero, de tal forma que:

$$V(y_t) = \phi_1^{\,2} V(y_t) + \sigma_\varepsilon^2 + \alpha^2\sigma_\varepsilon^2 - 2\phi_1\sigma_\varepsilon^2$$

$$V(y_t)\left(1-\phi_1^{\,2}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^{\,2} - 2\phi_1\theta_1\right) \qquad 53.$$

$$V(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^{\,2}-2\phi_1\theta_1\right)}{\left(1-\phi_1^{\,2}\right)}$$

V.9.2 ANÁLISIS DE LA FAC

Usando procedimientos similares a los de los modelos previos se tiene que:

$$\gamma_0 = V(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^{\,2}-2\phi_1\theta_1\right)}{\left(1-\phi_1^{\,2}\right)}$$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left[\phi_1 y_{t-1}^2 + \varepsilon_t y_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-1}y_{t-1}\right]$$

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^{\,2}}\sigma_\varepsilon^2 \qquad 54.$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(y_t y_{t-2}\right) = \mathrm{E}\left(\phi_1 y_{t-1}y_{t-2} + \varepsilon_t y_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-1}y_{t-2}\right)$$

$$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1$$

Generalizando, la FAC de un proceso ARMA (1,1) tiene el siguiente comportamiento:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \qquad \forall \ k > 1 \tag{55.}$$

V.9.3. ANÁLISIS DE LAS FAS Y LA FAP

A partir de la estimación de la FAC podemos derivar la FAS del modelo:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1} \tag{56.}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1\rho_1$$

Generalizando:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{k-1} \qquad \forall \ k > 1 \tag{57.}$$

Las expresiones 66 y 68 nos permiten verificar que el comportamiento de la FAC y la FAS de un ARMA (1,1) es muy similar al de un AR (1): decrece a una tasa ϕ_1. Nótese, sin embargo, que ello ocurre desde el momento en que k>1, o mejor dicho, a partir del momento en que k es mayor que el orden de la parte MA; ello es así porque, como hemos visto antes, la FAC y FAS del MA se hace cero para todo k mayor que su orden, por lo que en el comportamiento de estas funciones sólo prima el componente AR de la serie (Beltrán Barco, 2003).

Lo contrario ocurrirá en el caso del FAP: a partir del k>1 primará el comportamiento del componente MA, porque la FAP de la parte AR se hace cero.

Así:

$$FAS\ ARMA\ (1,1) \quad FAS\ AR\ (1)\ para\ todo\ k>1$$
$$FAP\ ARMA\ (1,1) \quad FAP\ MA\ (1)\ para\ todo\ k>1$$

Generalizando para los modelos ARMA de orden mayor podemos decir que, en el caso de un modelo ARMA (p,q) se tiene que:

$$FAS\ ARMA\ (p,q) \quad FAS\ AR(p)$$
$$FAP\ ARMA\ (p,\ q) \quad FAP\ MA(q)$$

X. LA METODOLOGÍA BOX-JENKINS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS UNIVARIANTES.

La metodología Box-Jenkins para la construcción de modelos univariantes es un método estructurado de modelización que, a través de distintas etapas, permite obtener una representación univariante de una serie temporal determinada en la forma $ARIMA(p,d,q)$ de modo que se satisfagan una serie de requisitos de calidad. Los instrumentos estadísticos fundamentales para la modelización según la metodología Box-Jenkins son: la función de autocorrelación muestral, los contrastes de significación conjunta de los coeficientes de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial (Castro, 2008).

Esta primera etapa de la metodología Box-Jenkins puede ser dividida en dos partes. En una parte se busca corregir los problemas propios de la serie, mientras que en una segunda se busca identificar un modelo ARMA(p,q) que logre explicar adecuadamente la serie en estudio (Casas Tragadora, 2002).

Con el gráfico de la serie en estudio podemos determinar si esta presenta un comportamiento estacionario o no estacionario. Las únicas formas que conocemos para poder corregir la no estacionariedad es: o bien diferenciando las series, en caso que la media de la misma no se mantenga constante, o bien aplicando logaritmos para poder suavizar la varianza de la serie.
Además de corregir la no estacionariedad, en esta parte del análisis se debe corregir cualquier defecto de la data como valores extremos (outlier) o falta de datos (missing values) (Casas Tragadora, 2002). Los valores extremos se corrigen empleando variables dicotómicas (variables dummies), mientras que la falta de datos puede ser corregida aplicando promedios móviles.

X.1 PROCESO ITERATIVO DE MODELIZACIÓN.

En el cuadro Nº4 se representa, en forma de diagrama de flujo, el proceso de construcción de modelos según esta metodología propuesta por Box y Jenkins, quienes proponen el comportamiento de la función de autocorrelación simple y la función de autocorrelación parcial (Castro, 2008).

Figura Nº 4

Parámetro	**Instrumento de identificación**	**Observaciones**
M	Decisión del analista por razones de conveniencia.	Suele utilizarse para poder aplicar la transformación logarítmica a series que contienen datos negativos o nulos.
λ	• Gráfico media-desviación estándar. • Gráfico de la serie temporal • Estimación del parámetro por máxima verosimilitud	Se elige con el objetivo de evitar que la varianza de la serie dependa de su nivel

D	• Gráfico de la serie temporal • FAS y FAP: pautas de decrecimiento (Más o menos lineal) indican no estacionariedad.	Se elige con el objetivo de hacer que el nivel de la serie sea aproximadamente constante.
Término Constante	• Media muestral de la serie transformada y diferenciada • Desviación estándar de la media muestral	Si la media de la serie transformada y diferenciada es significativa, el modelo debe incluir un término constante.
p y q	FAS	Una FAS infinita es característica de un proceso autorregresivo. Una FAS finita es característica de un proceso de media móvil, con q igual al número de coeficientes de autocorrelación no nulos.
	FAP	Una FAP infinita es característica de un proceso de media móvil. Una FAP finita es característica de un proceso autorregresivo, con p igual al número de coeficientes de autocorrelación parcial no nulos.

X.2 ANÁLISIS DE RESIDUOS EN LA IDENTIFICACIÓN DEL MODELO UNIVARIADO

Si suponemos que hemos elegido correctamente el tipo de modelo que se ajusta a nuestros datos, la elección del orden del mismo pasaría entonces por la realización de pruebas de significancia basadas en las funciones de autocorrelación simple y parcial.

Así, para determinar el orden de los modelos AR nos basaremos en la FAP, y para el de los modelos MA en la FAS (Castro, 2008).

Si el verdadero modelo es un AR (p), la distribución de los valores estimados de la FAP es igual a:

$$\phi_j \sim N(0,1/T) \qquad \forall\, j > p \tag{58.}$$

De forma tal que, si el estimado de ϕ_J se encuentra en el intervalo $\pm\ 2/\sqrt{T}$, para todos los valores de j mayores a p, entonces no se puede rechazar la hipótesis de que el orden del modelo es igual o menor a p.

De otro lado, se sabe que en un ruido blanco las estimaciones de la FAS tienen una distribución de la forma:

$$\rho_j \sim N(0,1/T) \quad \forall j \tag{59.}$$

Por lo tanto, si las estimaciones de ρ_j caen en el intervalo $\pm\ 2/\sqrt{T}$ para todo j mayor que q, entonces no podemos rechazar la hipótesis de que el modelo es un MA (q). Asimismo, si esto fuera cierto para todo j estaríamos en presencia de un ruido blanco (Beltrán Barco, 2003).

El problema de este tipo de prueba es que se sospecha que la verdadera varianza de las estimaciones de la FAP y la FAS ha sido sobreestimada, lo que produciría intervalos de confianza muy grandes que llevarían a dejar de aceptar la presencia de una estructura autorregresiva importante. Ante este riesgo se propone utilizar intervalos más conservadores: ±1.2 ó 1.5 la desviación estándar en vez del $\pm 2\sigma$ antes propuesto.

X.3. MODELO AUTORREGRESIVO $\mathbf{AR}(1)$

En el caso de un $\mathbf{AR}(1)$ es posible estimar el ϕ utilizando MCO, es decir:

$$\hat{\phi}_{MCO} = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} \qquad 60.$$

No obstante, hay un conjunto de observaciones alrededor de este estimador:

Por lo que al verificar la ortogonalidad entre la variable explicativa y el error, se observa que

$$Cov(y_{t-1}\varepsilon_t) = 0$$

$$Cov(y_{t+j-1}\varepsilon_t) = \theta^{j-1}\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$$

Por lo tanto, sólo hay independencia contemporánea, pero no con los valores futuros de las y_t.

1. Las variables explicativas no son exógenas, son endógenas rezagadas o predeterminadas (explicadas en un periodo previo por el modelo).
2. El estimador MCO es sesgado, es decir, $\mathrm{E}\left(\hat{\phi}\right) \neq \phi$. Así:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum\left[\phi y_{t-1}^2 + y_{t-1}\varepsilon_t\right]}{\sum y_{t-1}^2} \qquad 61.$$

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum y_{t-1}^2} \qquad 62.$$

$$\mathrm{E}\left(\hat{\phi}\right) = \theta + \underbrace{\mathrm{E}\left[\frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum y_{t-1}^2}\right]}_{sesgo} \qquad 63.$$

Dado que y_t no es exógena, no hay nada que garantice que la esperanza del cociente entre corchetes sea cero, por lo que el sesgo no desaparece.

Ante esto es indispensable verificar las propiedades asintóticas del estimador, principalmente si es consistente o asintóticamente insesgado, es decir:

$$\hat{\phi}_{MCO} \xrightarrow[prob]{} \phi?$$

de la expresión (58) se puede concluir que:

$$\hat{\theta} - \theta = \frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum y_{t-1}^2} \qquad 64.$$

dividiendo por T el numerador y denominador de la expresión de la izquierda de (73) se tiene que:

$$\hat{\phi} - \phi = \frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t / T}{\sum y_{t-1}^2 / T} \qquad 65.$$

De esta forma, por la ley de grandes números, el numerador tendería a cero y el denominador a σ^2; consecuentemente todo el cociente tendería a cero, comprobándose la convergencia en probabilidad del $\hat{\theta}$ por MCO a su verdadero valor, es decir, su consistencia.

De la misma manera, se pueden verificar las propiedades de la distribución del estimador planteado, siendo el objetivo en este caso demostrar que es una normal. Para ello será necesario formar la siguiente expresión:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\phi}-\phi\right)=\sqrt{T}\left(\frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum y_{t-1}^2}\right)=\frac{\sum y_{t-1}\varepsilon_t \big/ \sqrt{T}}{\sum y_{t-1}^2 \big/ T} \qquad 66.$$

De esta forma, podemos utilizar el teorema de Lindberg-Feller para formar un cociente que converja a una distribución normal con media cero y varianza 1. Es decir:

$$\frac{N_t}{D_t} \xrightarrow[d]{} N(0,1) \qquad 67.$$

Así, si definimos:

$$N_t=\sum y_{t-1}\varepsilon_t \qquad 68.$$

$$D_t=\sqrt{V(S_t)}=\sum V(y_t)V(\varepsilon_t)=T\sigma_y^2\sigma_\varepsilon^2=\sqrt{T}\sigma_y\sigma_\varepsilon \qquad 69.$$

Reemplazamos estas expresiones en (75), y tenemos en cuenta que el denominador de dicha expresión converge en probabilidad a σ², podemos construir:

$$\frac{N_t \big/ \sqrt{T}}{\sigma_y^2} \qquad 70.$$

Lo que puede rescribirse, multiplicando numerador y denominador por σ_ε, de forma que:

$$\frac{N_t \sigma_\varepsilon}{\sqrt{T}\sigma_y^2 \sigma_\varepsilon} = \frac{N_t \sigma_\varepsilon}{D_t \sigma_y} \tag{71.}$$

Con ello y recordando la expresión (66), se puede determinar que:

$$\sqrt{T}\left(\hat{\phi} - \phi\right) \xrightarrow[d]{} N\left(0, \frac{\sigma_y^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right) \tag{72.}$$

Obteniendo de esa forma que:

$$\hat{\phi} \xrightarrow[d]{} N\left(\phi, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T\sigma_y^2}\right) \tag{73.}$$

Con lo que se demuestra la convergencia en distribución del estimador MCO del modelo $AR(1)$ a una normal.

Por lo tanto, es eficiente usar MCO para estimar modelos de series de tiempo siempre que tengamos muestras grandes.[8]

Este análisis puede ser extendido a modelos AR de cualquier orden.[9]

[8] La regla práctica sugiere utilizar por lo menos 60 observaciones. Además siempre es mejor utilizar series de mayor cobertura que de más periodicidad, es decir, 100 años serán preferidos a 100 meses.

[9] Cabe mencionar que un método alternativo de estimación de estos modelos es el de las ecuaciones de Yule-Walker. El mismo tiene propiedades asintóticas similares a MCO pero arroja estimaciones diferentes. La práctica sugiere utilizar MCO.

X.4 MODELO MA$(\mathbf{q})$

La estimación directa de los modelos MA involucra métodos iterativos que requieren valores iniciales predeterminados para los parámetros. Una alternativa muy sencilla es usar la representación AR de un MA, lo que además tiene la ventaja de facilitar la interpretación de resultados (siempre es más fácil interpretar la relación entre la variable y sus valores pasados que con los respectivos errores). Sin embargo, surge el problema de que la representación AR de un MA es infinita, por lo que no podría ser estimada. Cabe recordar, no obstante, que si un MA se puede representar como un AR, o mejor dicho es invertible, deberá ser cierto que $|\alpha_{\mathrm{i}}| < 1$, por lo que los rezagos más alejados tendrán cada vez menor significancia para explicar el valor presente de la variable en cuestión. Una aproximación del punto de corte relevante nos lo da el siguiente teorema (Castro, 2008).

X.5. TEOREMA DE SAID Y DICKEY (1984):

Según este teorema un proceso $ARMA(p,q)$ se puede aproximar por un ARMA(n, 0), donde n no debe ser mayor a la raíz cubica del tamaño de la muestra ($T^{1/3}$) . De esta forma, el valor $T^{1/3}$ será continuamente utilizado para establecer el grado de correlación de la serie con su pasado, a fin de garantizar errores no correlacionados en la ecuación final estimada (Beltrán Barco, 2003).

XI. ESTIMACION DEL MODELO ARMA

Para estimar un modelo de este tipo se propone un proceso de estimación en dos etapas:

– Hallar la representación AR (p) que se ajusta mejor a la serie que se analiza.

– Verificar que los errores de la ecuación estimada no estén correlacionados; de lo contrario incorporar elementos MA a fin de resolver este problema.

De esta manera, se privilegiarán aquellos modelos con menor cantidad de términos MA y, muy probablemente, de menor grado (más parsimoniosos, como lo explicaremos más adelante).

XI.1 MÉTODO DE SELECCIÓN DE MODELOS DE BOX-JENKINS

Box y Jenkins propusieron en 1976 una estrategia en tres etapas para seleccionar un modelo univariado de series de tiempo que permitiera estimar y predecir en forma adecuada. Estas etapas se detallan a continuación (Beltrán Barco, 2003).

XI.2 ETAPA DE IDENTIFICACIÓN

Consiste en un análisis visual del gráfico de la serie y su correlograma. El primero permitirá hallar cualquiera de los siguientes problemas:

– La presencia de observaciones extremas o "missing values" (valores perdidos), los cuales deben ser corregidos antes de empezar el análisis.[10]
– La no estacionariedad en media o varianza de la serie, cuyo proceso de corrección será presentado más adelante.
– La existencia de cambios estructurales en la serie, los mismos que deben ser también eliminados, para ello existe una literatura basta acerca de los test para detectar los quiebres estructurales y las metodologías para su corrección empleando las variables dummies.

[10] El primer problema puede ser corregido a través de dummies construidas apropiadamente, y el segundo por medio de la exclusión de los valores perdidos, si es que no se presentan problemas adicionales al hacerlo.

Corregidos todos estos problemas será necesario examinar la función de autocorrelación estimadas de la serie, específicamente la FASM y la FAPM. La primera nos permitirá establecer los posibles términos MA presentes en el modelo, mientras que la segunda hará lo propio con los términos AR. A partir de éstos será posible construir diferentes combinaciones tentativas de dichos términos que arrojarán distintos modelos a estimar.

XI.3 ETAPA DE ESTIMACIÓN

Los modelos que arroja la primera etapa son estimados testeando la significancia de incluir las diferentes combinaciones de términos identificados a partir del correlograma. Aquellos que pasen esta primera prueba serán sometidos al análisis de correlación de errores y al de parsimonia.

•Correlación de Errores: Se espera que el error de la ecuación final sea ruido blanco, ya que de lo contrario estaría indicando un problema de variable omitida, que en este caso sería un rezago omitido. Para verificar esta condición se utiliza el estadístico Q, sea el Box-Pierce (1970) o el Ljung-Box (1978). Como es este último el que usa el Eviews en el correlograma de los errores, nos concentraremos en él. Así, siendo la hipótesis nula (Beltrán Barco, 2003):

H_o = un conjunto de k correlaciones es igual a cero (error no está correlacionado) el estadístico es:

$$Q = \mathrm{T}(\mathrm{T}+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{\rho_j^2}{(\mathrm{T}-\mathrm{j})} \approx \mathrm{X}^2{}_{k-p-q} \qquad 74.$$

Para aceptar la nula Q debe ser un valor pequeño (y la probabilidad asociada a aceptar la hipótesis nula mayor que 5% de nivel de significancia). Se preferirá entonces el modelo con menor Q.

•Parsimonia: Se basa en la comprobación de Box y Jenkins que modelos con menor cantidad de parámetros a estimar, pero buen ajuste, producen mejores predicciones que los modelos sobreparametrizados. Por ello, se busca aquellos con menor cantidad de rezagos dado un nivel de ajuste aceptabl (Beltrán Barco, 2003)e.

La parsimonia se evalúa a través de los criterios de información, que representa un balance entre la mejora del ajuste del modelo y la pérdida de grados de libertad que produce la incorporación de nuevos regresores. Los principales criterios de información utilizados en modelos temporales son:

Akaike Information Criterion (AIC)

$$AIC = -2L/T + 2K/T$$

Schwartz Bayesian Criterion (SBC)

$$SBC = -2L/T + \left(K \ lnT\right)/T$$

Donde K es el número de parámetros estimados (p+q en el caso de modelos univariados), L es la función de verosimilitud que mide el ajuste del modelo y T es el número de observaciones disponibles en TODOS los modelos que se comparan.

Se prefieren los modelos con AIK y SBC más bajo, ya que a medida que se incorporan reagresores aumenta K pero debería reducirse L en valor absoluto; si un regresor no tiene poder explicativo ambos estadísticos aumentan con su inclusión. Nótese que el SBC castiga mucho más el número de regresores (por lo general Ln T > 2) razón por la cual, de haber contradicción entre ellos, se preferirá éste último, además de que tiene mejores propiedades para muestras grandes.

XI.4 ETAPA DE DIAGNÓSTICO

Someter el modelo elegido a todas las pruebas tradicionales; especialmente verificar si todavía se observa autocorrelación de errores o si estos han sido adecuadamente corregidos de este problema. Además los errores no deben presentar auto correlación y si se quiere ser más estricto, aprobar la prueba de normalidad del os residuos, esto nos garantizará que al someter a las pruebas de inferencia de los estimadores del modelo muestral, estas sean válidas.

XI.5. PREDICCIÓN

El resultado de las etapas anteriores de la metodología de Box and Jenkins es la obtención de un modelo estimado que sea compatible con la estructura de datos. Sobre esta base, la fase siguiente consiste en utilizar el modelo estimado para predecir los valores futuros de la serie económica modelada, con las restricciones que estos modelos de series de tiempo univariante, pueden tener.

XI.5.1. PREDICCIÓN PUNTUAL:

Se trata de predecir el valor futuro de la serie ventas sujeto al menor error posible. En ese sentido, se demuestra que el predictor óptimo es aquel que hace mínimo el error cuadrático medio de predicción definido como:

$$ECM = E(Y_{T+1} - p)^2$$

Donde Y_{T+1} es el verdadero valor de la variable ventas en el periodo T+1 y p es la predicción puntual dad por el modelo.

El predictor óptimo, que denotaremos mediante $\hat{Y}_{T+l}$ es decir el que minimiza la ($E(Y_{t+1}-p)^2$ viene dado por:

$$\hat{Y}_T(l) = E(Y_{T+l} / I_T)$$

El modelo obtenido se puede plantear como un modelo teórico:

$$(1-\phi_2 L^2)(1-\Phi_1 L^{12})w_t = (1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^{12})u_t$$

$$(1-\phi_1 L-\Phi_1 L^{12}+\phi_1\Phi_1 L^{13})w_t = (1-\Theta_1 L^{12}+\theta_1 L+\Theta_1\theta_1 L^{13})u_t$$

$$W_t = (1-L^{12})(1-L)\ln y_t = 1-L-L^{12}+L^{13}$$

Realizando las multiplicaciones respectivas tenemos el modelo final para la predicción:

$$\begin{aligned}&(1-(1+\phi_1)L^{12}-(1+\phi_1)L-((1+\phi_1)+(1-\phi_1)\Phi_1)L^{13}+\phi_1 L^2- \\ &(1+\Phi_1)L^{13}+\phi_1\Phi_1 L^{14}+(\phi_1-\Phi_1)L^{24}+\phi_1\Phi_1 L^{25}-\phi_1\Phi_1 L^{26}) \\ &+\phi_4 L^{18}+\Phi_1 L^{24}-\phi_1 L^{25}-\phi_1\Phi_1 L^{26})\ln export = (1-\theta_1 L-\Theta_1 L^{12}-\Theta_1\theta_1 L^{13}) \\ &+\Theta_1\theta_3 L^{15})u_t\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

Castro, J. (2008). *Análisis univariado de series de tiempo.* Notas de Clase BCRP 55º Curso de Extensión Universitaria.

Mahía, R. (1999). *Revisión de los procedimientos de análisis de la estacionariedad de las series temporales.* Obtenido de https://www.uam.es/personal_pdi/economicas/rmc/doctorado/tendest.PDF

Beltrán Barco, A. (2003). *Econometría de series de tiempo.* Lima: . Universidad del Pacífico. Obtenido de https://econometriaii.files.wordpress.com/2010/01/beltran.pdf

Casas Tragadora, C. (2002). *Econometria Moderna.* UP, Economía.

de Arce, R., & Mahía, R. (2007). Técnicas de Previsión de variables financieras:Modelos Arima. (M. d. Citius, Ed.)